ECUACIÓNS, INECUACIÓNS E SISTEMAS

1. Ecuacións de grao 1 e 2

Unha ecuación é unha igualdade na que aparece unha letra, chamada incógnita, que representa a un número que se quere calcular. Resolver unha ecuación é atopar o valor da incógnita.

1.1 Ecuacións de primeiro grao

Unha ecuación de primeiro grao cunha incógnita é toda ecuación que se pode transformar noutra da forma $ax + b = 0$, onde a e b son números reais chamados coeficientes da ecuación e $a \neq 0$. É dicir, é unha ecuación cunha única incógnita a cal está elevada a 1.

Exemplo 1.1.1: Resolve a ecuación $4 \cdot (x-1) - 2(x+1) = -1$

1. Eliminamos as parénteses: $4x - 4 - 2x - 2 = -1$
2. Agrupamos os termos en x nun dos membros e os números noutro: $4x - 2x = -1 + 4 + 2$
3. Realizamos as operacións: $2x = 5$
4. Dividimos entre o seu coeficiente de x: $x = \frac{5}{2}$

Se a ecuación contén denominadores, estes elimínanse multiplicando polo mínimo común múltiplo (mcm) dos denominadores.

Exemplo 1.1.2: Resolve a ecuación $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = -\frac{1}{8}$

Como o $mcm(2,4,8) = 8$, multiplicamos ambos membros da ecuación por 8 e simplificamos.

$$8 \cdot \frac{x-1}{2} - 8 \cdot \frac{x+1}{4} = -8 \cdot \frac{1}{8} \rightarrow 4 \cdot (x-1) - 2(x+1) = -1$$

Unha vez eliminamos os denominadores procedemos coma no exemplo 1.1.1.

1.2 Ecuacións de segundo grao.

Unha ecuación de segundo grao é aquela que reducida ten a forma $ax^2 + bx + c = 0$; onde a, b e c son números reais chamados coeficientes da ecuación e $a \neq 0$.

Se b ou c valen 0 diremos que a ecuación é incompleta. Noutro caso chámase completa.

Vexamos como resolvelas en cada caso:

- Se a ecuación é completa (ten a forma $ax^2 + bx + c = 0$) utilizaremos a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

  Exemplo 1.2.1: $x^2 + 5x + 6 = 0 \ \ (a = 1,\ b = 5,\ c = 6)$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-5+1}{2} = -2 \\ \frac{-5-1}{2} = -3 \end{cases}$$

- Se $b = 0$, a ecuación é da forma $ax^2 + c = 0$

- Despexamos x^2: $ax^2 = -c \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$
- Aplicamos a raíz cadrado en ambos membros: $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Exemplo 1.2.2: $4x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

- Se $c = 0$, a ecuación é da forma $ax^2 + bx = 0$
  - Sacamos factor común: $x(ax + b) = 0$
  - Igualamos cada factor a 0 e resolvemos as ecuacións resultantes: $\begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{cases}$

Exemplo 1.2.3: $2x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(2x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -3/2 \end{cases}$

2. Ecuacións de grao superior a 2

2.1 Ecuacións bicadradas

As ecuacións da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ con $a \neq 0$ chámanse ecuacións bicadradas. Para resolvelas, facemos o cambio de variable $t = x^2$. Obtemos a ecuación de grao 2, $at^2 + bt + c = 0$.

Resolvemos a ecuación mediante a fórmula (1) e obtemos dúas solucións, t_1 e t_2. Desfacemos o cambio de variable e resolvemos as ecuacións $x^2 = t_1$ e $x^2 = t_2$.

Exemplo 2.1.1: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{t=x^2} t^2 - 10t + 9 = 0.$

Resolvemos a ecuación $t^2 - 10t + 9 = 0$ mediante a fórmula correspondente:

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} \dfrac{10 + 8}{2} = 9 \\ \dfrac{10 - 8}{2} = 1 \end{cases}$$

Unha vez resolta a ecuación, desfacemos o cambio de variable e despexamos x:

$$t = x^2 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Neste caso, obtéñense catro solucións distintas: $-1, 1, -3, 3$. Non obstante, non sería así se unha das t fose negativa, xa que a raíz cadrada dun número negativo non é un número real.

2.2 Ecuacións de grao 3 ou superior

Vimos de estudar un caso particular de ecuacións de grao 4. Neste apartado veremos como resolver as ecuacións grao maior que 2 en xeral.

Para resolver ecuacións de grao 3 ou superior pasaremos todos os termos ao mesmo membro, de tal xeito que nos quede un polinomio igualado a 0, $P(x) = 0$. A continuación, factorizaremos $P(x)$. Recordemos os métodos de factorización de polinomios.

- Extraer factor común: consiste en achar un factor común, c, en tódolos sumandos do polinomio. Escribimos o polinomio orixinal, $P(x)$, como o produto de c polo cociente da división de $P(x)$ entre c.
  Exemplo 2.2.1: Extrae factor común do polinomio $x^3 + x^2 - 2x = x \cdot (x^2 + x - 2)$
- Identidades notables: se o polinomio é de grao 2 debemos preguntarnos se é identidade notable. Recordemos que as identidade notables son:
  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. ***Exemplo 2.2.2:*** $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$
  $(a-b)^2 = a - 2ab + b^2$. ***Exemplo 2.2.3:*** $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. ***Exemplo 2.2.4:*** $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
- A ecuación de 2º grao: se o polinomio é de grao 2 e non é unha identidade notable, podemos igualalo a 0 e resolver a ecuación resultante. Supoñamos que as solucións da ecuación son $x = a$ e $x = b$, entón o polinomio factoriza como $(x-a) \cdot (x-b)$.
  Exemplo 2.2.5: Factoriza o polinomio $x^2 + x - 6$.
  Resolvo a ecuación $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$
  Polo tanto, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$
- A regra de Ruffini

A regra de Ruffini utilízase para dividir un polinomio entre outro da forma $(x - a)$.

Exemplo 2.2.6: Divida o polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 6x + 5$ entre $(x - 2)$.

Escribimos os coeficientes de $P(x)$ e o valor de a, neste caso 2, como se mostra a continuación:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 6 & 5 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Baixamos o 1º coeficiente e o multiplicamos por a (neste caso 2). O resultado escríbese debaixo do 2º coeficiente e súmanse. Repetimos o proceso con todos os coeficientes:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 6 & 5 \\ 2 & \downarrow & 2 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & 6 & \boxed{17} \end{array}$$

O último resultado é o resto da división, 17. O resto son os coeficientes do polinomio cociente, neste caso $1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 6 = x^2 + 6$.

Para poder factorizar un polinomio tomamos como a os divisores do termo independente. Aqueles cos que o resto sexa 0, son as raíces do polinomio.

Exemplo 2.2.7: Factoriza o polinomio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

Os divisores do termo independente son: $D(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Imos buscar aqueles para os que o resto da división sexa 0. Repetiremos o proceso ata que o cociente sexa un polinomio de grao 1, é dicir, ata que o cociente teña 2 coeficientes.

Para facilitar o proceso podemos escribir a factorización que obtemos con cada división. Cando escribimos a factorización final non podemos esquecer os divisores dos pasos anteriores:

	1	-5	5	5	-6	
1		1	-4	1	6	
	1	-4	1	6	0	$P(x) = (x-1)\cdot(x^3-4x^2+x+6)$
-1		-1	5	-6		
	1	-5	6	0		$P(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-5x+6)$
2		2	-6			
	1	-3	0			$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$

Vexamos agora como aplicar estes métodos na resolución de ecuacións.

Exemplo 2.2.8: Resolve a ecuación $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$. No exemplo 2.2.7 obtivemos que $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$. Logo, resolver dita ecuación é equivalente a resolver $(x-1)(x+1)(x-2)(x-3) = 0$. Igualamos cada factor a 0 e resolvemos:

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

3. Ecuacións racionais e con radicais

3.1 Ecuacións racionais

As ecuacións nas que aparece algunha fracción alxébrica chámanse ecuacións racionais. Para suprimir os denominadores nestas ecuacións úsase o mínimo común múltiplo dos denominadores; de xeito similar a cando os denominadores son números.

Como hai que multiplicar por expresións alxébricas, poden aparecer solucións falsas; polo tanto, débese comprobar se as solucións obtidas son válidas para a ecuación proposta.

Exemplo 3.1.1: Resolve a ecuación racional $\frac{2}{x+1} - \frac{x}{x-1} = -1$

$$mcm\,(x+1, x-1) = (x+1)(x-1)$$

Multiplicamos ambos membros da ecuación polo mcm e simplificamos cando sexa posible:

$$(x+1)(x-1)\cdot\frac{2}{x+1} - (x+1)(x-1)\cdot\frac{x}{x-1} = (x+1)(x-1)\cdot(-1) \xrightarrow{simplificamos}$$

$$2(x-1) - x(x+1) = -1(x+1)(x-1) \xrightarrow[as\ parénteses]{eliminamos} 2x - 2 - x^2 - x = -x^2 + 1$$

$$\xrightarrow[ao\ lado\ esquerdo]{pasamos\ os\ termos} 2x - 2 - x^2 - x + x^2 - 1 = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Comprobación: $\frac{2}{3+1} - \frac{3}{3-1} = -1 \rightarrow \frac{2}{4} - \frac{3}{2} = -1 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \rightarrow -1 = -1$ é certo→ $x = 3$ é solución

3.2 Ecuacións con radicais

As ecuacións con radicais son aquelas nas que a variable aparece dentro dun radical.

Para resolver as ecuacións con radicais íllase a raíz nun dos membros, despois elévanse ambos os dous membros ao índice do radical (eliminando así a raíz) e resólvese a ecuación obtida.

Ao igual que nas ecuacións racionais, débense comprobar as solucións.

Exemplo 3.2.1: Resolve a ecuación $\sqrt{x-1}+7=x$

1. Illamos a raíz: $\sqrt{x-1}=x-7$
2. Elevamos ao cadrado ambos membros da ecuación. Observa que o 2º membro é un produto notable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:
$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-7)^2 \rightarrow x-1=x^2-14x+49$$
3. Pasamos todos os termos ao 2º membro: $0 = x^2 - 15x + 50 \leftrightarrow x^2-15x+50=0$
4. Resolvemos a ecuación: $x=\frac{-(-15)\pm\sqrt{15^2-4\cdot 50}}{2\cdot 1}=\frac{15\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{15\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{15+5}{2}=10\\ \frac{15-5}{2}=5\end{cases}$
5. Comprobamos as solucións:
   - $x=10 \rightarrow \sqrt{10-1}+7=10 \rightarrow 3+7=10 \rightarrow \mathbf{10=10}$
   - $x=5 \rightarrow \sqrt{5-1}+7=10 \rightarrow 2+7=10 \rightarrow \mathbf{9=10}$ non é certo, logo non é solución.

A solución da ecuación é $x=10$.

Nota: Comproba que se non illamos primeiro a raíz, esta non se elimina.

Exemplo 3.2.2: Resolve a ecuación $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=5$

1. Illamos unha das raíces: $\sqrt{x+6}=5-\sqrt{x+1}$
2. Elevamos ao cadrado ambos membros da ecuación. Observa que o 2º membro é un produto notable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:
$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2=\left(5-\sqrt{x+1}\right)^2 \rightarrow x+6=5^2-2\cdot 5\cdot\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{x+1}\right)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow x+6=25-10\sqrt{x+1}+x+1$$
3. Illamos a raíz restante e simplificamos:
$$10\sqrt{x+1}=25+x+1-x-6 \rightarrow 10\sqrt{x+1}=20 \rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{20}{10} \rightarrow \sqrt{x+1}=2$$
4. Volvemos a elevar ao cadrado ambos membros da ecuación para eliminar a raíz: $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=2^2 \rightarrow x+1=4$
5. Resolvemos a ecuación: $x=4-1 \rightarrow x=3$
6. Comprobamos a solución:
$$x=3 \rightarrow \sqrt{3+6}+\sqrt{3+1}=5 \rightarrow 3+2=5 \rightarrow \mathbf{5=5}$$

A solución da ecuación é $x=3$.

4. Ecuacións exponenciais e logarítmicas

4.1 Ecuacións logarítmicas

Un logaritmo é a operación inversa dunha potencia. O logaritmo dun número é o expoñente ao que hai que elevar a base para que resulte tal número. Isto é:

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exemplo 4.1.1: $\log_5 25 = 2$, porque $5^2 = 25$; $\log_3 81 = 4$, porque, $3^4 = 81$.

Debido á relación entre os logaritmos e as potencias, todas as propiedades destas tradúcense en propiedades dos logaritmos:

PROPIEDADES	EXEMPLOS
Só existen logaritmos de números positivos.	$\log_3 -3$ non existe porque non hai ningún número ao que se poida elevar 3 para que resulte –3.
O logaritmo de 1 sempre é 0: $\mathbf{\log_a 1 = 0}$	$\log_4 1 = 0$ porque $4^0 = 1$.
O logaritmo da base é 1: $\mathbf{\log_a a = 1}$.	$\log_5 5 = 1$ porque $5^1 = 5$
O logaritmo dun produto é igual á suma dos logaritmos dos factores: $\boldsymbol{\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y}$	$\log_2 4 \cdot 16 = \log_2 4 + \log_2 16$
O logaritmo dun cociente é igual ao logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador: $\boldsymbol{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$	$\log_3 \frac{243}{9} = \log_3 243 - \log_3 9 = 5 - 2 = 3$ $\log_3 243 = x \leftrightarrow 3^x = 243 \leftrightarrow 3^x = 3^5 \leftrightarrow x = 5$ $\log_3 9 = x \leftrightarrow 3^x = 9 \leftrightarrow 3^x = 3^2 \leftrightarrow x = 2$
O logaritmo dunha potencia é igual ao expoñente polo logaritmo da base da potencia: $\boldsymbol{\log_a x^p = p \cdot \log_a x}$	$\log_2 8^3 = 3 \cdot \log_2 8 = 3 \cdot 3 = 9$ $\log_2 8 = x \leftrightarrow 2^x = 8 \leftrightarrow 2^x = 2^3 \leftrightarrow x = 3$

Nalgúns casos o logaritmo non terá solución exacta e terá que resolverse ca calculadora. Unha gran parte das calculadoras só dispoñen das teclas log e ln polo que teremos que transformar o noso logaritmo, en logaritmos naturais ou neperianos, utilizando a fórmula de cambio de base:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \text{ ou } \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Exemplo 4.1.2: $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}584962501 \ldots$

Unha ecuación logarítmica é unha ecuación na que a incógnita aparece dentro dun logaritmo.

Para resolvelas empregaremos as propiedades dos logaritmos para obter unha igualdade do tipo $\log_a x_1 = \log_a x_2$, e comparando deducimos que $x_1 = x_2$.

Exemplo 4.1.3: Resolve a ecuación $\log x + \log x - 2 = \log 3$.

Utilizando as propiedades dos logaritmos, agrupamos os logaritmos de cada membro da ecuación nun único logaritmo. Neste caso utilizamos que $\log a + \log b = \log a \cdot b$:

$\log x + \log(x-2) = \log 3 \rightarrow \log x \cdot (x-2) = \log 3$

Comparamos ambos membros: $x(x-2) = 3 \rightarrow x^2 - 2x = 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

Comprobamos os resultados e obtemos que a única solución válida é $x = 3$ xa que o logaritmo dun número negativo non existe.

Noutras ocasións obteremos unha igualdade entre un logaritmo e un número. Neste caso bastará con utilizar a definición de logaritmo.

Exemplo 4.1.4: Resolve a ecuación $\log_5 x^2 - \log_5 x = 2$

Utilizando a propiedade $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ obtemos:

$$\log_5 \frac{x^2}{x} = 2 \rightarrow \log_5 x = 2 \xrightarrow{definición} 5^2 = x \rightarrow x = 25$$

4.2 Ecuacións exponenciais

Unha ecuación exponencial é unha ecuación na que aparecen potencias e a incógnita encóntrase nalgún dos expoñentes.

Para a resolución das ecuacións exponenciais débese expresar, se é posible, o termo independente como unha potencia da mesma base que a da incógnita. Unha vez temos a mesma base, comparamos ambas expresións: se $a^x = a^b \rightarrow x = b$.

Exemplo 4.2.1: Resolve $2^x = 8$.

1. Escribimos o termo independente como una potencia de base 2: $2^x = 2^3$
2. Comparamos: se $2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$

A ecuación pode ser máis complicada, nese caso faremos as transformacións necesarias para chegar a unha expresión similar á anterior.

Exemplo 4.2.2: Resolve $2^{x+1} + 2^{x+2} = 48$

Utilizamos as propiedades das potencias para escribir ambas potencias como 2^x. Neste caso utilizamos a propiedade $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$:

$$2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^2 = 48 \xrightarrow{\substack{sacamos \\ factor \\ común\ 2^x}} 2^x(2+4) = 48 \rightarrow 2^x \cdot 6 = 48 \xrightarrow{despexamos\ 2^x} 2^x = \frac{48}{6} \rightarrow 2^x = 8$$

Neste punto continuaríamos como no exemplo 4.1.1.

Cando non sexa posible escribir ambos membros ca mesma base utilizaremos logaritmos.

Exemplo 4.2.3: Resolve a ecuación $3^x = 7$. Como 7 non se pode escribir como unha potencia de base 3 aplicamos logaritmos a ambos membros:

$$\ln 3^x = \ln 7$$

Aplicamos a propiedade $\ln a^x = x \cdot \ln a$ xa que nos permite baixar a incógnita do expoñente.

$$x \cdot \ln 3 = \ln 7 \xrightarrow{Despexamos\ x} x = \frac{\ln 7}{\ln 3} = 1{,}7712$$

5. Inecuacións

Unha inecuación é unha desigualdade que se compón de dúas expresións alxébricas separadas polos signos $<, >, \leq$ ou $\geq$.

A solución dunha inecuación está formada por todos os valores que fan que a desigualdade sexa certa. Para expresala utilizaremos intervalos e semirrectas.

Un intervalo de extremos a e b é o conxunto de números reais comprendidos entre a e b. Existen diferentes tipos de intervalos:

- Intervalo pechado de extremos a e b: o conxunto está formado por a, b e todos os puntos intermedios. Para indicar que están incluídos utilizamos corchetes:

  $$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

  

  Ilustración 1: Intervalo pechado de extremos a e b

  Graficamente trazaremos un segmento unindo os dous extremos e estes con puntos recheos.

- Intervalo aberto de extremos a e b: o conxunto está formado por todos os puntos maiores que a e menores que b. Para indicar que a e b non están incluídos utilizamos parénteses:

  $$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

  

  Ilustración 2: Intervalo aberto de extremos a e b.

  Graficamente trazaremos un segmento unindo os dous extremos e estes con puntos ocos.

- Intervalo semiaberto de extremos a e b: o conxunto está formado por todos os puntos maiores que a e menores que b cun dos extremos incluído e o outro sen incluír.

  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ou $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Unha semirrecta é o conxunto de todos os números reais maiores ou menores que un dado.

- Semirrecta aberta: o punto non se inclúe
  - Todos os maiores que a: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.
  - Todos os menores que a: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- Semirrecta pechada: o punto está incluído
  - Todos os maiores que a con a incluído: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
  - Todos os puntos menores que a con con a incluído $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

Exemplo 5.1:

$(2, \infty)$ son todos os número maiores que 2:

Ilustración 3: Semirrecta aberta

$(-\infty, 3]$ son todos os números menores que 3 e o 3:

Ilustración 4: Semirrecta pechada

Cando se quere nomear un conxunto de puntos formado por dous ou máis destes intervalos, utilízase o signo $\cup$ (unión) entre eles.

5.1 Inecuacións de primeiro grao

Unha inecuación lineal ou de primeiro grao cunha incógnita é toda desigualdade que simplificada equivale a $ax + b > 0$, con $a \neq 0$. (Pode aparecer calquera das catro desigualdades, $<, >, \leq$ ou $\geq$).

Para resolver unha inecuación de 1º grao procederemos de xeito similar que para resolver unha ecuación de 1º grao, tendo en conta que en lugar dun = temos algunha das desigualdades e que se multiplicamos ou dividimos por un número negativo a desigualdade cambia (de < a > e viceversa).

Exemplo 5.1.1: resolve a inecuación $2(x - 1) \leq 5x - 8$.

- Quítanse as parénteses: $2x - 2 \leq 5x - 8$.
- Agrúpanse os termos en x nun membro e os números noutro: $2x - 5x \leq -8 + 2 \rightarrow -3x \leq -6$.
- Divídense ambos membros entre -3. Ao tratarse dun número negativo a desigualdade cambia: $-3x \leq -6 \xrightarrow{divido\ entre\ -3} x \geq -\frac{6}{-3} \rightarrow x \geq 2$

Solución: $x \in [2, +\infty)$.

5.2 Inecuacións de segundo grao

As inecuacións de segundo grao cunha incógnita na súa forma reducida son expresións da forma $ax^2 + bx + c > 0$ con $a \neq 0$. (Pode aparecer calquera das catro desigualdades, $<, >, \leq$ ou $\geq$).

Para resolvelas calcularemos a solución da ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, representaremos as solucións obtidas, de tal xeito que obteremos 3 (ou menos) intervalos, e estudaremos o signo do polinomio $ax^2 + bx + c$ en ditos intervalos.

Exemplo 5.2.1: Resolve a inecuación $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

- Resolvemos a ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 4$
- Substituímos un número de cada intervalo en $P(x) = x^2 - 2x - 8$ e estudamos o seu signo:

$(-\infty, -2)$	$x = -2$	$(-2, 4)$	$x = 4$	$(4, \infty)$
$P(-3) = 7 > 0$	$P(-2) = 0$	$P(0) = -8 < 0$	$P(4) = 0$	$P(5) = 7 > 0$

Como queremos os valores nos que o polinomio valga 0 ou negativo a solución é o intervalo [–2, 4].

6. Sistemas de ecuacións

Un sistema de ecuacións é un conxunto de dous ou máis ecuacións con 2 ou máis incógnitas.

Resolver un sistema é encontrar os valores das incógnitas que fan verdadeiras todas as ecuacións do sistema. Se non existe unha solución común, o sistema non ten solución.

6.1 Métodos de resolución de sistemas

Entre os métodos alxébricos que existen para resolver sistemas atópanse os seguintes:

Método de substitución: Despéxase unha incógnita nunha das ecuacións e substitúese a expresión obtida nas outras ecuacións.

Exemplo 6.1.1: Resolver o sistema lineal $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$ mediante o método de substitución.

- Despexamos x na primeira ecuación: $x=7-3y$
- A expresión obtida para x substitúese na segunda ecuación: $3\cdot(7-3y)-2y=-1$
- Resolvemos a ecuación: $3\cdot(7-3y)-2y=-1 \rightarrow 21-9y-2y=-1 \rightarrow 22=11y \rightarrow y=2$
- Substituímos o valor de y na 1ª ecuación: $x=7-3\cdot 2 \rightarrow x=1$

A solución do sistema é $(x,y)=(1,2)$.

Este método é o máis recomendado para resolver sistemas non lineais.

Método de igualación: Despéxase a mesma incógnita en todas as ecuacións e iguálanse as expresións obtidas.

Exemplo 6.1.2: Resolver o sistema lineal $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

- Despéxamos x nas dúas ecuacións: $\begin{cases} x=7-3y \\ x=\frac{2y-1}{3} \end{cases}$
- Igualamos e resolvemos: $7-3y=\frac{2y-1}{3} \rightarrow 21-9y=2y-1 \rightarrow 22=11y \rightarrow y=2$
- Substituímos nunha das ecuacións: $x=7-3\cdot 2 \rightarrow x=1$

A solución do sistema é $(x,y)=(1,2)$.

Método de redución: Multiplícanse as ecuacións por números axeitados de forma que ao sumar os resultados elimínase unha das incógnitas.

Exemplo 6.1.3: Resolver o sistema lineal $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

Imos eliminar x, xa que nunha das ecuacións ten coeficiente 1 e resulta máis sinxelo.

- Multiplicamos a 1ª ecuación por -3: $\begin{cases} -3x-9y=-21 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$
- Sumamos ambas ecuacións: $-11y=-22$
- Resolvemos a ecuación resultante: $y=2$
- Substituímos o valor de y na 1ª ecuación e despexamos x: $x+3\cdot 2=7 \rightarrow x=1$

A solución do sistema é $(x,y)=(1,2)$.

6.2 Clasificación dos sistemas lineais

Cada ecuación $ax+by=c$ dun sistema lineal de dúas ecuacións con dúas incógnitas representa unha recta do plano. A solución do sistema é o punto ou puntos comúns a ambas rectas. Graficamente temos as seguintes situacións:

- As dúas rectas córtanse nun punto (x,y). O sistema ten solución única, o punto (x,y). O sistema é compatible determinado.
- As rectas coinciden, polo que toda a recta é solución. O sistema ten infinitas solucións. O sistema é compatible indeterminado.

- As rectas son paralelas, non teñen puntos en común. O sistema non ten solución. O sistema é incompatible.

6.3 Método de Gauss para sistemas lineais

O método de Gauss é unha xeneralización do método de redución para resolver e discutir (saber se o sistema é ou non compatible) sistemas lineais con calquera número de ecuacións e de incógnitas. Trataranse sistemas con tres incógnitas, aínda que non necesariamente con tres ecuacións. O sistema dado convértese noutro sistema graduado equivalente, é dicir, nun sistema cuxa 1ª ecuación ten 3 incógnitas, a 2ª ten 2 incógnitas e a 3ª ten 1 incógnita.

Exemplo 6.3.1: O sistema $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3y-2z=0 \\ 3z=9 \end{cases}$ é un sistema graduado.

Para indicar as operacións utilizadas para transformar o sistema orixinal nun graduado denotaremos por E_1 á 1ª ecuación, por E_2 á 2ª e por E_3 á 3ª.

Exemplo 6.3.2: Resolve o sistema $\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ 2x-3y+4z=4 \\ 5x-y+3z=16 \end{cases}$

1. Eliminamos a x en E_2 e E_3:
   - Substitúese E_2 pola ecuación que resulta ao sumarlle E_1 multiplicada por -2:
   $$\begin{cases} -2x+2y+4z=2\ (-2\cdot E_1) \\ 2x-3y+4z=4\ (E_2) \end{cases} \xrightarrow{sumamos} E_2: -y+8z=6$$
   - Substitúese a E_3 pola que resulta ao sumarlle E_1 multiplicada por -5:
   $$\begin{cases} -5x+5y+10z=5\ (-5\cdot E_1) \\ 5x-y+3z=16\ (E_3) \end{cases} \xrightarrow{sumamos} E_3: 4y+13z=21$$

   O sistema resultante é: $\begin{cases} x-y-2z=-1\ (E_1) \\ -y+8z=6\ (E_2) \\ 4y+13z=21\ (E_3) \end{cases}$

2. Eliminamos a y de E_3:
   Substitúese E_3 pola que resulta ao sumarlle E_2 multiplicada por 4:
   $$\begin{cases} -4y+32z=24\ (4\cdot E_2) \\ 4y+13z=21\ (E_3) \end{cases} \xrightarrow{Sumamos} 45z=45$$

   O sistema resultante é: $\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ -y+8z=6 \\ 45z=45 \end{cases}$

3. Resolvemos o sistema empezando pola 3ª ecuación e terminando pola 1ª:
   $$\begin{cases} x-y-2z=-1 \to x-2-2\cdot 1=-1 \to x=3 \\ -y+8z=6 \to -y+8\cdot 1=6 \to y=2 \\ 45z=45 \to z=1 \end{cases}$$

   A solución do sistema é $(x,y,z)=(3,2,1)$.

Observación: Non é preciso indicar cada paso de maneira tan detallada. Basta con indicar as operacións realizadas, como se mostra a continuación:

$$\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ 2x-3y+4z=4 \\ 5x-y+3z=16 \end{cases} \xrightarrow[E_3-5E_1]{E_2-2E_1} \begin{cases} x-y-2z=-1 \\ -y+8z=6 \\ 4y+13z=21 \end{cases} \xrightarrow{E_3+4E_2} \begin{cases} x-y-2z=-1 \to x=3 \\ -y+8z=6 \to y=2 \\ 45z=45 \to z=1 \end{cases}$$

Ao igual que ocorre cos sistemas de dúas ecuacións, o sistema pode ter unha, infinitas ou non ter solución. Para clasificalos teremos que transformar o sistema orixinal nun graduado.

- Se o sistema graduado ten algunha ecuación do tipo $0z=b$, o sistema é **incompatible**, non ten solución. Exemplo: $\begin{cases} 2x-3y+x=3 \\ -y+2z=2 \\ 0z=2 \end{cases}$
- Se ao reducir o sistema non sucede o anterior é **compatible**, ten solución.
  - Se o número de ecuacións é menor que o número de incógnitas, o sistema ten infinitas solucións. Dito doutra forma, algunha das ecuacións é trivial $(0=0)$. É un sistema compatible indeterminado. Exemplo: $\begin{cases} x-y-z=2 \\ 2y+x=2 \\ 0z=0 \end{cases}$
  - Se o número de ecuacións non triviais é igual ao número de incógnitas, o sistema ten solución única. É un sistema compatible determinado. Exemplo: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=-1 \\ 2z=1 \end{cases}$

7. Sistemas de inecuacións

7.1 Sistemas de inecuacións con unha incógnita

Un sistema de inecuacións con unha incógnita é un conxunto de dous ou máis inecuacións con unha incógnita.

Para resolvelos, resolveremos cada unha das inecuacións e buscaremos a solucións común a todas.

Exemplo 7.1.1: Resolve os sistema de inecuacións $\begin{cases} 3x<9 \\ 2x+1>2 \end{cases}$

1. Resolvemos cada inecuación por separado:
   $\begin{cases} 3x<9 \to x<9/3 \to x<3 \\ 2x+1\geq 3 \to 2x\geq 3-1 \to x\geq 1 \end{cases}$
2. Representamos ambas solucións e buscamos a solución común.
   Solución: $x \in [1,3)$

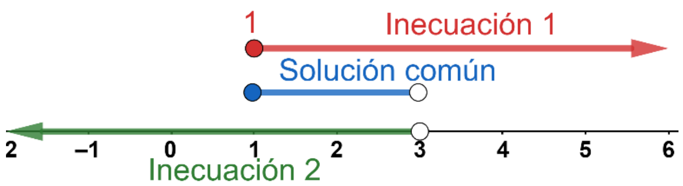

Ilustración 5: Solución do sistema $\begin{cases} 3x<9 \\ 2x+1>2 \end{cases}$

7.2 Sistemas de inecuacións con dúas incógnitas

Un sistema de inecuacións con dúas incógnitas é un conxunto de dous ou máis inecuacións con 2 ou máis incógnitas.

De novo, para resolver estes sistemas resolveremos cada unha das inecuacións e buscaremos a solucións común a todas.

Para resolver unha inecuación con dúas incógnitas $ax + by < c$ (ou $\leq, >, \geq$), primeiro representamos a recta $(ax + by = c)$, de tal forma que o plano queda dividido en dous semiplanos. Despois, escollemos un punto, que non pertenza á recta, e substituímolo para ver se verifica a inecuación. Se a verifica a solución será todo o semiplano no que está o punto, se non, será o outro semiplano.

Exemplo 7.2.1: Resolve o sistema $\begin{cases} x + y \leq 6 \text{ ①} \\ y < 4 \text{ ②} \end{cases}$

① Representamos a recta $x + y = 6 \rightarrow y = 6 - x$.

Facemos unha táboa de valores:

x	0	1
y	6	5

Como a inecuación ten a desigualdade $\leq$ a recta é parte do semiplano, logo representarémola cunha liña continua.

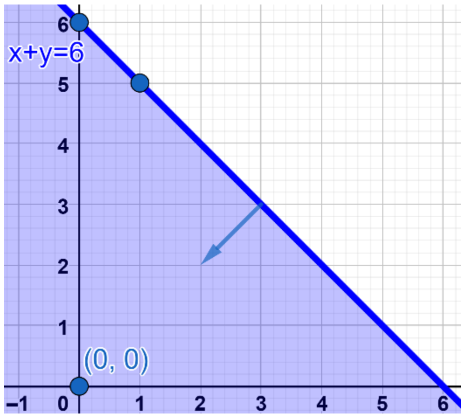

Ilustración 6: Inecuación $x + y \leq 6$

Agora, escollemos un punto de fora da recta, por exemplo o $(0{,}0)$, e substituímolo na inecuación:

$0 + 0 \leq 6$, é certo, logo a solución é o semiplano no que está o $(0{,}0)$

② Representamos a recta $y = 4$. Como a desigualdade é $<$ a recta non está incluída na inecuación e polo tanto, representámola cunha liña descontinua.

De novo, substituímos o $(0{,}0)$: $0 < 4$, logo a solución é o semiplano no que está o $(0{,}0)$.

Por último representamos ambas inecuacións xuntas e a área común será a solución.

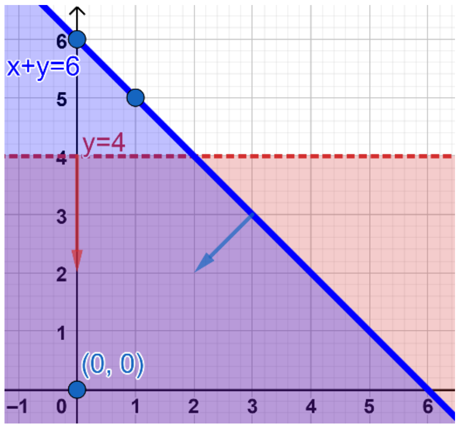

Ilustración 7: Solución do sistema $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ y < 4 \end{cases}$

8. Resolución de problemas

Para resolver problemas mediante ecuacións débense seguir os pasos seguintes:

1. Identificar as incógnitas: Baseándonos en que pregunta o problema, decidimos cales son as incógnitas
2. Formulación: Consiste en traducir o enunciado escrito a linguaxe alxébrico.
3. Resolución: Parte na que se resolve a ecuación ou o sistema.
4. Discusión: Compróbamos que a solución obtida ten sentido no contexto do problema.

Exemplo 8.1: A cantidade de cartos que un rapaz leva no peto é tal que se gasta a terceira parte máis a súa sétima parte, aínda lle quedarían 2´5 euros máis a metade do que levaba. Que cantidade de cartos levaba no peto?

1. Identificamos a incógnita: Sexa x os cartos que levaba no peto.
2. Formulación:
   - Diñeiro inicial: x
   - Gastos: $\begin{cases} \text{A terceira parte dos cartos: } \frac{x}{3} \\ \text{A sétima parte dos cartos: } \frac{x}{7} \end{cases}$
   - Cantidade sobrante: $\begin{cases} 2{,}5€ \\ \text{A metade dos cartos: } \frac{x}{2} \end{cases}$

   Ecuación: $x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{7}\right) = 2{,}5 + \frac{x}{2}$
3. Resolución: Multiplico polo $mcm(2,3,7) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

   $x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{7}\right) = 2{,}5 + \frac{x}{2} \xrightarrow{\cdot 42} 42 \cdot \left[x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{7}\right)\right] = 42 \cdot \left(2{,}5 + \frac{x}{2}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow 42x - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{x}{3} - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{x}{7} = 105 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{x}{2} \xrightarrow{simplifico} 42x - 14x - 6x = 105 + 21x \rightarrow x = 105$$

4. Discusión: A solución ten sentido co contexto do problema, logo a cantidade de cartos que levaba era 105€.

Exemplo 8.2: Unha multinacional ten delegacións en Madrid, Barcelona e Valencia. O número total de altos executivos das tres delegacións ascende a 31. Para que o número de altos executivos da delegación de Barcelona fose igual ao de Madrid terían que trasladarse 3 de Madrid a Barcelona. Ademais, o número dos de Madrid excede nun á suma dos destinados nas outras dúas cidades. Cantos altos executivos están destinados en cada cidade?

1. Sexan x, y, z o número de altos executivos (AE) de Madrid, Barcelona e Valencia, respectivamente.
2. Formulación:
   - Número total de AE: $x + y + z$
   - Número de AE de Madrid: x. Se 3 se trasladan a Barcelona, pasan a ser $x - 3$
   - Número de AE de Barcelona: y. Se 3 de Madrid se unen pasan a ser $y + 3$
   - Número de AE de Barcelona e Valencia: $y + z$. En Madrid son 1 máis: $y + z + 1$.

$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ x - 3 = y + 3 \\ x = y + z + 1 \end{cases}$$

3. Resolución:

$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ x - 3 = y + 3 \\ x = y + z + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 31 \\ x - y = 6 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow[E_3 - E_1]{E_2 - E_1} \begin{cases} x + y + z = 31 \\ -2y - z = -25 \\ -2y - 2z = -30 \end{cases} \xrightarrow{E_3 - E_2} \begin{cases} x + y + z = 31 \rightarrow x = 16 \\ -2y - z = -25 \rightarrow y = 10 \\ -z = -5 \rightarrow z = 5 \end{cases}$$

4. Discusión: A solución ten sentido co contexto do problema, logo os executivos da multinacional serán: 16 en Madrid, 10 en Barcelona e 5 en Valencia.

Licenzas das ilustracións

Ilustración	**Recurso**
Ilustración 1. Intervalo pechado de extremos a e b	Autoría: elaboración propia
Ilustración 2. Intervalo aberto de extremos a e b	Autoría: elaboración propia
Ilustración 3. Semirrecta aberta	Autoría: elaboración propia
Ilustración 4. Semirrecta pechada.	Autoría: elaboración propia
Ilustración 5. Solución do sistema $\begin{cases} 3x < 9 \\ 2x + 1 > 2 \end{cases}$	Autoría: elaboración propia
Ilustración 6. Inecuación $x + y \leq 6$	Autoría: elaboración propia
Ilustración 7. Solución do sistema $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ y < 4 \end{cases}$	Autoría: elaboración propia