

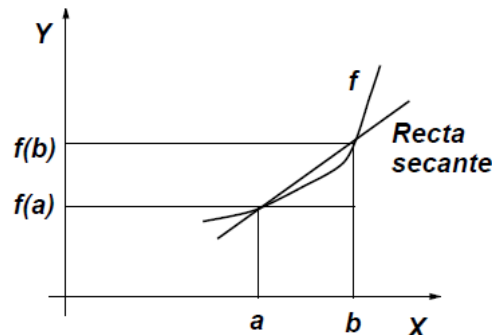
DERIVADA DUNHA FUNCIÓN E AS SÚAS APLICACIÓN

1. Concepto de derivada

1.1 Taxa de variación media

A pendente dunha recta é un número que mide a inclinación desa recta. Pódese calcular coa fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Supóñase agora que se ten unha función, f , que non é unha recta. Neste caso non podemos determinar a pendente, pero sí a súa variación media nun certo intervalo.



Consideramos o intervalo $[a, b]$, e trazamos unha recta secante aos puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (ver a ilustración 1). A pendente da recta secante é $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Este número mide a variación media da función no intervalo $[a, b]$. Chámase taxa de variación media da función f no intervalo $[a, b]$ (TVM de f en $[a, b]$).

Exemplo 1.1.1: Para a función $f(x) = 2x^2$, calcule a taxa de variación media no intervalo $[1, 2]$.

$$\text{TVM de } f \text{ en } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1^2}{1} = 6$$

1.2 Derivada nun punto. Taxa de variación instantánea

Dada unha función f , a súa derivada nun punto a , se existe, é a pendente da recta tanxente á gráfica da función nese punto.

Supoñamos que queremos calcular a pendente da recta tanxente á gráfica da función f no punto $x = a$ (ver ilustración 2). Consideramos o intervalo $[a, a + h]$ e trazamos a recta secante á gráfica. A súa pendente vén dada pola TVM nese intervalo, é

$$\text{dicir: } \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

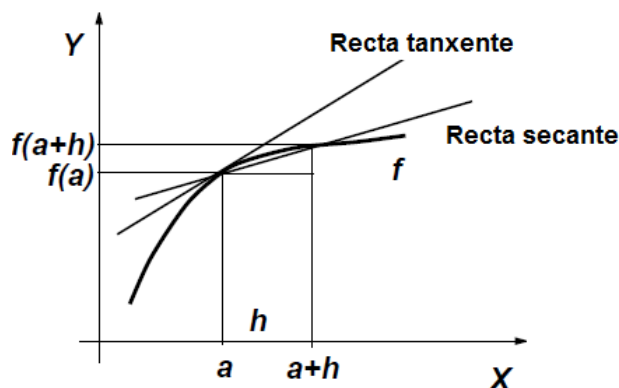


Ilustración 2: Aproximación da pendente da recta tanxente

Por outra banda, segundo se ve na imaxe, se h se vai facendo cada vez máis pequeno, chegará un momento no que a recta secante se converta na recta tanxente. Entón, se facemos que $h \rightarrow 0$, a pendente da recta secante convértese na pendente da recta tanxente.

Tendo en conta que a pendente da recta tanxente nun punto é a derivada da función nese punto, definimos a derivada da función f en $x = a$, $f'(a)$, como o límite $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Calcular a derivada dunha función nun punto supón entón o cálculo dun límite. Se este límite existe, dise que a función é derivable nese punto.

Exemplo 1.2.1: Calcule a derivada da función $f(x) = x^2$ en $x = 1$, é dicir, $f'(1)$.

Aplícase a fórmula anterior:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{0}{0} \text{ (Ind)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Polo tanto, a derivada da función $f(x) = x^2$ en $x = 1$ é $f'(1) = 2$.

Como a derivada nun punto é o límite da TVM chámase, tamén, taxa de variación instantánea.

1.3 Derivadas laterais

Definimos as derivadas laterais de f en $x = a$ como os seguintes límites:

- Derivada á esquerda: $f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Derivada á dereita: $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Deducimos que para que unha función sexa derivable nun punto, é preciso que nese punto existan as derivadas laterais e sexan iguais. É dicir:

$$f \text{ é derivable en } x = a \leftrightarrow f'_-(a) = f'_+(a)$$

1.4 Recta tanxente e recta normal

Unha das formas de calcular a ecuación dunha recta é a de utilizar a ecuación punto-pendente: $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde m é a súa pendente e (x_0, y_0) un punto da recta.

Unha recta tanxente a unha curva f , é unha recta que corta á función f nun único punto. Dito punto pertence a f e polo tanto, é da forma $(a, f(a))$ e, como se viu antes, a súa pendente é a derivada de f no punto, é dicir, $m = f'(a)$. Substituíndo na ecuación punto-pendente, obtemos que a ecuación da recta tanxente a f en $x = a$ é $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

A recta normal a f en $x = a$ é unha recta perpendicular á recta tanxente en dito punto. Dado que as rectas son perpendiculares, a pendente da normal, m' , verifica que $m' = -\frac{1}{m}$ e posto que $m = f'(a)$, a ecuación da recta normal a f en $x = a$ é $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$.

Exemplo 1.4.1: Calcule as rectas tanxente e normal á curva $f(x) = x^2$ en $x = 1$.

- Recta tanxente: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

Necesitamos calcular $f(1)$ e $f'(1)$: $f(1) = 1^2 = 1$ e $f'(1) = 2$ (calculouse no exemplo 1.2.1)

Polo tanto a recta tanxente a f en $x = 1$ é: $y - 1 = 2(x - 1) \rightarrow y = 1 + 2x - 2 \rightarrow y = 2x - 1$

- Recta normal: $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$

Substituímos os datos e obtemos que a recta normal a f en $x = 1$ é:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

2. Función derivada

2.1 Derivabilidade e continuidade

Según se viu, unha función f é derivable en $x = a$ se existe o límite $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Se nesta expresión se fai $x = a + h$, entón que $h \rightarrow 0$ equivale a que $x \rightarrow a$. Pola tanto, podemos reescribir o límite como $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Desta segunda definición obtemos un resultado importante:

Se f é derivable en $x = a$, entón f é continua en $x = a$.

Agora ben, se unha función é continua nun punto, non ten por que ser derivable nese punto.

Exemplo 2.1.1: Estude se a función valor absoluto $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ é derivable en $x = 0$.

Como a función está definida en dous anacos, que son distintos á esquerda e á dereita do 0, non podemos calcular directamente o límite en 0, téñense que calcular os límites laterais.

$$\text{Pola esquerda: } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \frac{0}{0} (\text{Ind}) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

$$\text{Pola dereita: } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \frac{0}{0} (\text{Ind}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Como os límites non coinciden, a derivada $f'(0)$ non existe.

Sen embargo, a función valor absoluto é continua en todo $\mathbb{R}$.

2.2 Funcións derivables

Dicimos que unha función é derivable, sen especificar en que punto, cando é derivable en todos os puntos do seu dominio de definición.

A maioría das funcións que se estudaron ata agora son derivables. En particular, as funcións polinómicas, as trigonométricas e as funcións exponenciais e logarítmicas.

Ademais, se f e g son funcións derivables, tamén o son: $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (se $g \neq 0$), $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$.

2.3 Función derivada

Dada a función f , podemos calcular a súa derivada nun punto xenérico x , da mesma forma que se faría nun punto concreto (a partir da definición). A dita función chamarémola función derivada de f ou, simplemente, derivada de f e denotámola por $f'(x)$.

Exemplo 2.3.1: Calcule a derivada da función $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{0}{0} (\text{Ind}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = 2x$$

Polo tanto, $f'(x) = 2x$. Esta fórmula pódese utilizar agora para calcular a derivada en calquera punto, sen máis que substituír na derivada. Por exemplo, en $x = 1$, $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

2.4 Derivadas de orde superior

Dada a función derivable, $f(x)$, pódese calcular a súa derivada, $f'(x)$ que é á súa vez unha nova función. Se $f'(x)$ tamén é derivable, pódese calcular a súa derivada. A esta nova función, á derivada da derivada, chamaráselle derivada segunda e denotarase $f''(x)$. A derivada da derivada segunda, será a derivada terceira e denotarase $f'''(x)$, e así sucesivamente.

2.5 Táboa de derivadas

Do mesmo xeito que no exemplo 2.3.1, podemos obter a derivada de todas as funcións elementais. Sen embargo, sería moi laborioso utilizar a definición cada vez que queramos calcular unha derivada. Por elo, elaborouse unha táboa de derivadas, que debes memorizar, para obter a derivada de calquera función sen necesidade de ter que recorrer continuamente á definición de derivada.

Funcións	Derivada
Polinómicas	
$y = k, k \in \mathbb{R}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
Exponenciais	
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
Logarítmicas	
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
Trigonométricas	
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

Exemplo 2.5.1: Calcule as derivadas das funcións $y = 5$, $y = x^5$, $y = 3^x$ e $y = \log_8 x$

- $y = 5; y' = 0$
- $y = x^5; y' = 5 \cdot x^{(5-1)} = 5x^4$
- $y = 3^x; y' = 3^x \cdot \ln 3$
- $y = \log_8 x; y' = \frac{1}{x \cdot \ln 8}$

2.6 Regras de derivación

Xa se coñecen as derivadas das funcións elementais. Agora vanse estudar algunhas regras de derivación que nos permitirán calcular a derivada das funcións que derivan das da táboa.

2.6.1 Regras para derivar sumas, produtos e cocientes

- Derivada dunha constante por unha función, $y = k \cdot f(x)$
Para derivar o produto dunha constante por unha función, só é necesario multiplicar a constante pola derivada da función, é dicir, $y' = k \cdot f'(x)$

Exemplo 2.6.1.1: Calcula a derivada da función $f(x) = 5x^7$.

A función $f(x) = 5x^7$ está formada pola constante $k = 5$ e pola función $g(x) = x^7$. A derivada de $g(x) = x^7$ é $g'(x) = 7x^6$, polo tanto, a derivada de f é $f'(x) = k \cdot g'(x) = 5 \cdot 7x^6 = 35x^6$

- Derivada dunha suma ou unha diferenza de funcións $y = f(x) \pm g(x)$

Para derivar unha suma (ou unha diferenza) de funcións, hai que derivar cada un das funcións que interveñen na suma (ou diferenza) e logo sumar (ou restar) as derivadas correspondentes. É dicir, $y' = f'(x) \pm g'(x)$.

Exemplo 2.6.1.2: Calcula a derivada da función $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

A función f é suma das funcións $g(x) = x^2$ e $h(x) = \sqrt{x}$. Derivamos g e h :

- $g'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$ (función da forma $y = x^n$)
- $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow h'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (función da forma $y = x^n$)

Logo, a derivada de f é $f'(x) = g'(x) + h'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Derivada dun produto de dúas funcións $y = f(x) \cdot g(x)$

A derivada dun produto non é tan inmediata como a dunha suma, xa que a derivada dun produto non é o produto das derivadas, como se podería esperar. A fórmula correcta é:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Exemplo 2.6.1.3: Calcula a derivada da función $h(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

No exemplo anterior vimos que a derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$ e de $g(x) = \sqrt{x}$ é $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Polo tanto a derivada de $h(x)$ é:

$$h'(x) = 2x \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- Derivada dun cociente de dúas funcións $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

A derivada dun cociente, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, obtense mediante a fórmula:

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Exemplo 2.6.1.4: Calcule a derivada da función $h(x) = \frac{\sin x}{x^3}$

A derivada de $f(x) = \sin x$ é $f'(x) = \cos x$ e de $g(x) = x^3$ é $g'(x) = 3x^2$. Entón:

$$h'(x) = \frac{\cos x \cdot x^3 - \sin x \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{x^2 \cdot (x \cos x - 3 \sin x)}{x^6} = \frac{x \cos x - 3 \sin x}{x^4}$$

2.6.2 Regra da cadea

A regra da cadea é sen dúbida a regra máis importante das derivadas. Isto é así porque se utiliza en todas aquelas situacións nas que aparece unha función dentro doutra, é dicir, cando se ten unha composición de funcións.

Para derivar unha composición de funcións da forma $y = f(g(x))$ hai que derivar a función f en $g(x)$ e multiplicar pola derivada $g'(x)$. É dicir:

$$y = f(g(x)) \quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (1)$$

Exemplo 2.6.2.1: Derive a función $y = (2x^3 + x)^8$.

Esta función é composición da función $g(x) = 2x^3 + x$ con $f(x) = x^8$. Como se trata dunha composición de funcións, temos que utilizar a fórmula (1) para derivala:

$$f'(x) = 8x^7 \text{ e } g'(x) = 6x^2 + 1 \rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 8(2x^3 + x)^7 \cdot (6x^2 + 1)$$

Realmente a efectos prácticos non é necesario utilizar a fórmula textualmente, basta con darse conta de cal é a función “principal” e cal é a “secundaria”.

Exemplo 2.6.2.2: Derive a función $y = \sqrt{4x + 5}$.

A función “principal” é $f(x) = \sqrt{x}$ e a súa derivada é $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Neste caso, dentro da raíz non está x senón a función $g(x) = 4x + 5$, cuxa derivada é $g'(x) = 4$. Polo tanto, neste caso como a función que se ten é $y = \sqrt{g(x)}$, a súa derivada será $y' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x+5}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$.

3. Aplicación das derivadas á representación de funcións.

3.1 Monotonía e extremos relativos

Das ideas que se estudaron no bloque anterior, a máis importante, é a de que a derivada dunha función nun punto é a pendente da recta tanxente á gráfica da función nese punto. Utilizando esta idea vaise estudar como crece ou decrece unha función (monotonía) e como se poden localizar os seus máximos e os seus mínimos.

3.1.1. Crecemento e decrecemento

Na ilustración 3 representouse unha función crecente. Unha función é crecente se, a medida que aumenta a x aumenta a y . É dicir:

Unha función é crecente se para calquera a e b , tales que $a < b$ cúmprese que $f(a) < f(b)$.

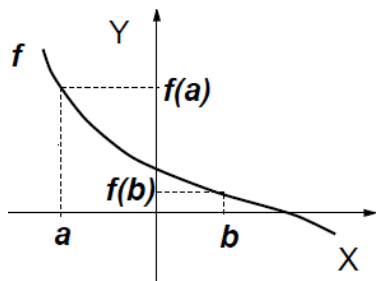


Ilustración 4: Función decrecente

Por outra banda, na ilustración 4, representouse unha función decrecente, é dicir, unha función na que, a medida que aumenta a x diminúe a y . Noutras palabras:

Unha función é decrecente se para calquera a e b , tales que $a < b$ cúmprese que $f(a) > f(b)$.

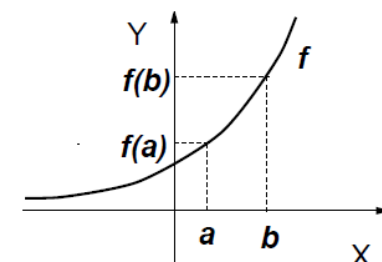


Ilustración 3: Función crecente

Cando unha función é crecente (ou decrecente) en todo o seu dominio dise que é monótona.

Que ocorre coa derivada dunha función crecente ou decrecente?

Na ilustración 5 debuxouse a recta tanxente nun punto dunha función crecente. Observamos que a pendente de dita recta é positiva, polo tanto, a súa derivada tamén o será.

Análogamente, na ilustración 6, a α é pendente negativa e, este mesmo signo terá a súa derivada.

Entón, estudar o crecemento e decrecemento dunha función mediante a súa derivada, consiste en estudar o seu signo.

Sexa f unha función derivable nos puntos do intervalo aberto (a, b) :

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entón f é crecente en (a, b) .
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entón f é decrecente en (a, b) .

Exemplo 3.1.1.1: Determina os intervalos de crecemento e decrecemento da función $f(x) = x^4 - 2x^2$.

En primeiro lugar, calcúlase a súa derivada: $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} - 2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 4x^3 - 4x$

Queremos estudar o signo da derivada. A derivada é unha función continua en todo $\mathbb{R}$, logo $f'(x)$ só pode cambiar de signo nos puntos nos que se anula, é dicir:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow 4x(x - 1)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

Imos estudar o signo nos intervalos nos que estes puntos dividen á recta:

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de f'	$f'(-2) < 0$	$f'(-0,5) > 0$	$f'(0,5) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	f é decrecente	f é crecente	f é decrecente	f é crecente

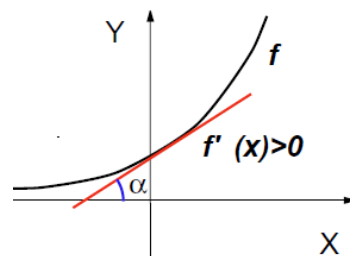


Ilustración 5: Comportamento da derivada dunha función crecente.

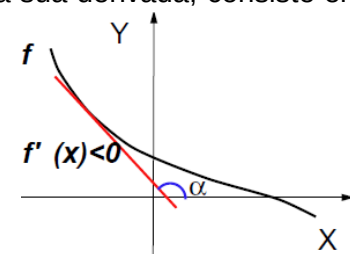


Ilustración 6: Comportamento da derivada dunha función decrecente.

Tamén poderemos utilizar un esquema como o da ilustración 7:

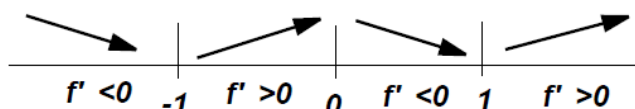


Ilustración 7: Esquema de estudo do signo da derivada

En calquera caso, sempre deberemos redactar as conclusións do seguinte xeito:

f é crecente en $(-1,0) \cup (1,\infty)$ e decrecente en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$.

3.1.2. Extremos relativos e absolutos: Máximos e mínimos

Unha función alcanza nun punto un máximo relativo cando nese punto toma o valor máis alto de todos os que se atopan preto del. Da mesma maneira, unha función alcanza nun punto un mínimo relativo cando nese punto toma o valor máis baixo de todos os que se atopan preto del. Nas ilustracións 8 e 9 debuxáronse dúas funcións cun máximo e un mínimo relativo, respectivamente. Na gráfica da ilustración 8 o máximo alcánzase no punto x_0 , porque para calquera outro punto x preto de x_0 o valor $f(x_0)$ é maior (ou igual) que o valor $f(x)$. Analogamente co mínimo.

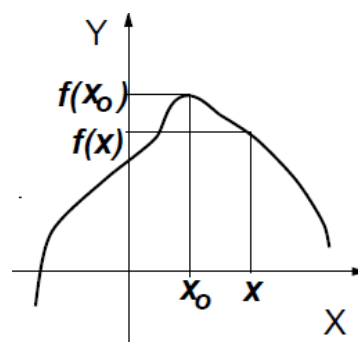


Ilustración 8: Función cun máximo

Para precisar a idea de proximidade o que se fai é pensar nalgún intervalo (a,b) no que estea incluído o punto x_0 :

- f ten un máximo relativo en x_0 se existe un intervalo (a,b) , que contén a x_0 , no cal calquera punto x do intervalo, $x \in (a,b)$, verifica que $f(x_0) \geq f(x)$.
- f ten un mínimo relativo en x_0 se existe un intervalo (a,b) , que contén a x_0 , no cal calquera punto x do intervalo, $x \in (a,b)$, verifica que $f(x_0) \leq f(x)$.

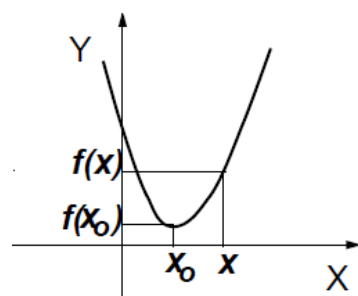


Ilustración 9: Función cun mínimo

Dito doutro xeito:

- Unha función ten un máximo relativo se a función é crecente á esquerda de dito punto e decrecente á dereita.
- Unha función ten un mínimo relativo se a función é decrecente á esquerda de dito punto e crecente á dereita.

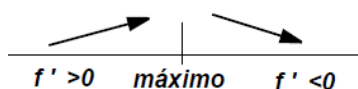


Ilustración 10: Esquema dun máximo

Usarase a expresión extremos relativos para referirse a ambos, máximos e mínimos.



Ilustración 11: Esquema dun mínimo

Ademais de extremos relativos, unha función tamén pode ter extremos absolutos cando, en lugar de ter en conta só un intervalo, se ten en conta todo o dominio da función.

- Unha función ten un máximo absoluto en x_0 se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x do dominio de definición da función (ver ilustración 8).
- Unha función ten un mínimo absoluto en x_0 se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x do dominio de definición da función (ver ilustración 9).

Se unha función f , derivable nos puntos do intervalo aberto (a,b) , alcanza un máximo ou mínimo relativo en $x_0 \in (a,b)$, entón $f'(x_0) = 0$.

Sen embargo, que a derivada valga 0 nun punto, non asegura que en dito punto haxa un extremo relativo. A estes puntos chamámoslos puntos críticos ou singulares.

Esta característica proporciona un procedemento para estudar, de maneira conxunta, crecemento, decrecemento e posibles extremos dunha función:

1. Calculamos a derivada da función, igualámola a 0 e resolvemos a ecuación resultante.
2. Estudamos o crecemento e decrecemento, mediante o signo da primeira derivada.
3. Escribimos os intervalos de crecemento e decrecemento e os máximos e os mínimos, se existen.

Exemplo 3.1.2.1: Estude os a monotonía e os puntos críticos da función $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.

Como é un polinomio, é derivable en todo $\mathbb{R}$.

Calculamos a derivada primeira, igualámola a 0 e resolvemos a ecuación resultante

$$f'(x) = 3 \cdot 5 \cdot x^{5-1} - 20 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 15x^4 - 60x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15x^4 - 60x^2 = 0 \xrightarrow[\text{factor común}]{\text{Sacamos}} 15x^2(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} 15x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Entón, hai tres puntos críticos, $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$ que poden ser máximos, mínimos ou ningunha das dúas cousas.

Estúdase agora o crecemento e decrecemento mediante o signo da derivada nos intervalos que determinan os anteriores puntos críticos:

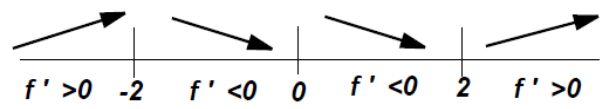


Ilustración 12: Esquema dos signos da derivada de f

Á vista do esquema anterior, pódese concluír que en $x = -2$ hai un máximo relativo e en $x = 2$ hai un mínimo relativo, mentres que en $x = 0$ non hai máximo nin mínimo.

Como o obxectivo final é debuxar a gráfica da función, será necesario coñecer, tamén, a coordenada y dos máximos e mínimos. Para calcular a coordenada y hai que substituír a x na función f :

- $f(-2) = 3 \cdot (-2)^5 - 20 \cdot (-2)^3 = 64$
- $f(2) = 3 \cdot 2^5 - 20 \cdot 2^3 = -64$

Entón, f é crecente en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ e decrecente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$. Ten un máximo relativo en $(-2, 64)$ e un mínimo relativo en $(2, -64)$.

Por último, aclarar que este cálculo non permite coñecer se os máximos e mínimos son absolutos ou non, para saber isto, necesitaríase saber algo máis acerca da forma da gráfica da función.

3.2 Curvatura: concavidade, convexidade e puntos de inflexión

Os conceptos de concavidade e convexidade dunha función son difíciles de precisar formalmente, pero moi fáciles de comprender mediante un debuxo.

Para que unha función sexa convexa debe ocorrer que, se debuxamos unha corda que una dous puntos A e B da función, os puntos da gráfica da función quedarán por debaixo dela (ver ilustración 13). Vese entón que a gráfica cóvrase cara arriba.

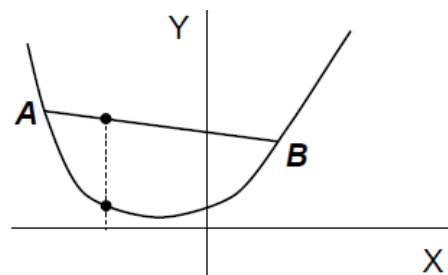


Ilustración 13: Función convexa

Para que unha función sexa cóncava debe cumprir que, se trazamos unha corda que una dous puntos A e B da función, os puntos da función deben quedar por encima dela (ver ilustración 14). Vese entón que a gráfica cóvrase cara abaixo.

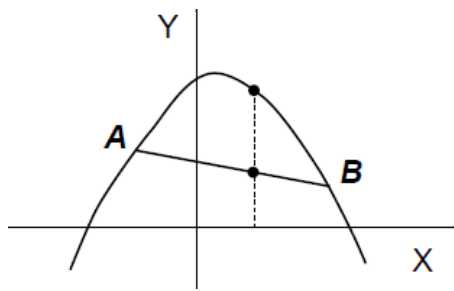


Ilustración 14: Función cóncava

Unha función pode ser cóncava ou convexa en todo o seu dominio, pero en moitas ocasións haberá intervalos nos que a función sexa cóncava, e outros intervalos nos que a función sexa convexa. Isto é o que ocorre nas gráficas dos debuxos seguintes. Nestas gráficas sinalamos, en vermello, o punto no que, aproximadamente, a función cambia de cóncava a convexa, ou de convexa a cóncava. A estes puntos nos que a función cambia a súa curvatura, chámase-lles puntos de inflexión.

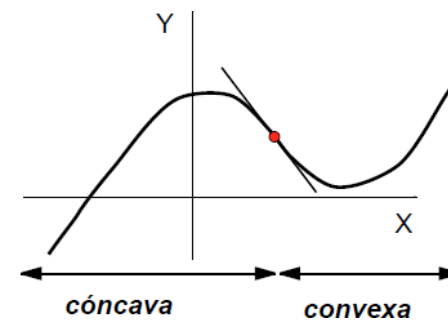


Ilustración 15: Función cóncava e convexa

Sexa f unha función derivadable dúas veces nun intervalo (a, b) :

- Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, f é convexa en (a, b) .
- Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, f é cóncava en (a, b) .

Que ocorrerá entón nun punto de inflexión? Nun punto de inflexión hai un cambio de curvatura: de cóncava a convexa (ou de convexa a cóncava). Polo tanto, o signo de $f''(x)$ cambia de negativo a positivo ou viceversa. En calquera dos dous casos, para cambiar de signo, hai que pasar por cero. Con máis precisión:

Se f ten en x_0 un punto de inflexión, e existe a derivada segunda, entón $f''(x_0) = 0$.

É importante sinalar que o feito de que $f''(x_0) = 0$ non é suficiente para que neste punto haxa un punto de inflexión, é necesario que haxa cambio de curvatura.

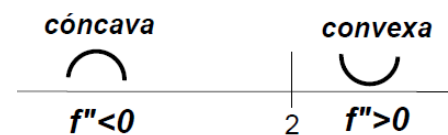
Exemplo 3.2.1: Estude a curvatura e os puntos de inflexión da función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

Calculamos a derivada segunda, igualamos a 0 e resolvemos (para determinar os posibles puntos de inflexión):

$$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} - 6 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 3x^2 - 12x; \quad f''(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 12 \cdot 1 = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$$

Estudamos o signo de f'' nos intervalos que $x = 2$ determina no eixe X (ilustración 16).

Ilustración 16: Esquema do signo da segunda derivada de f

Entón, hai un punto de inflexión en $x = 2$, xa que hai cambio de curvatura. Temos que calcular a coordenada y do punto: $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 = -16$

En conclusión, f é cóncava en $(-\infty, 2)$ e convexa en $(2, \infty)$. Ten un punto de inflexión en $(2, -16)$.

3.2.1 Criterio da derivada segunda para máximos e mínimos

O feito de que a derivada segunda sirva para estudar a concavidade e convexidade dunha función fai que tamén se poida utilizar para determinar se un punto crítico é máximo ou mínimo.

Sexa f unha función cun punto crítico en $x = a$, tal que $f'(a) = 0$:

- Se $f''(a) > 0$, entón f ten en $x = a$ un mínimo, con coordenadas $(a, f(a))$.
- Se $f''(a) < 0$, entón f ten en $x = a$ un máximo, con coordenadas $(a, f(a))$.

O feito de que só se necesite saber o signo da derivada segunda no punto crítico fai que este criterio sexa fácil de aplicar. Non obstante, existe un problema, se resulta $f''(a) = 0$, o criterio non proporciona ningunha información sobre se o punto é máximo ou mínimo. Neste caso, habería que acudir ao estudo do crecemento e decrecemento coa derivada primeira.

Exemplo 3.2.1.1: Estude os puntos críticos da función $f(x) = x(6 - 2x)^2$ utilizando a derivada segunda.

Primeiro calculamos os puntos críticos, utilizando a derivada primeira.

Ten en conta que a función é produto de dúas funcións, $g(x) = x$ e $h(x) = (6 - 2x)^2$ cuxas derivadas son $g'(x) = 1$ e $h'(x) = 2 \cdot (6 - 2x)^{2-1} \cdot (-2) = -4(6 - 2x) = -24 + 8x$

$$f'(x) = 1 \cdot (6 - 2x)^2 + x \cdot (-24 + 8x) = 36 - 24x + 4x^2 - 24x + 8x^2 = 12x^2 - 48x + 36$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0 \xrightarrow{\div 12} x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$\text{Agora calcúlase a derivada segunda: } f''(x) = 12 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 48 \cdot 1 + 0 = 24x - 48$$

E substitúense nela os puntos críticos:

- $f''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 > 0$, entón en $x = 3$ hai un mínimo.
- $f''(1) = 24 \cdot 1 - 48 = -24 < 0$, entón en $x = 1$ hai un máximo.

4. Estudo da gráfica dunha función

Foixe estudando, nesta e nas quincenas anteriores, conceptos que resultan útiles para analizar a gráfica dunha función. A continuación expónse un posible guión para este estudo.

1. Dominio de definición
2. Cortes cos eixes
3. Simetrías
4. Monotonía e extremos relativos
5. Curvatura e puntos de inflexión
6. Asíntotas
7. Representación gráfica

Exemplo 4.1: Estuda e representa a gráfica da función $f(x) = x^4 - 4x^2$

1. Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ por ser un polinomio; ademais, é continua en todo o dominio.

2. Puntos de corte cos eixes:

- Eixe OX : $y = 0 \rightarrow 0 = x^2(x^2 - 4) \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2,0), (2,0) \end{cases}$
- Eixe OY : $x = 0 \rightarrow f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^2 = 0 \rightarrow (0,0)$

3. Simetrías: $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x) \rightarrow f$ é par

4. Monotonía e extremos relativos:

Calculamos a primeira derivada: $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} - 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 4x^3 - 8x$

Igualámola a 0 para obter os puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 8x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Estúdase o crecemento e decrecemento nos intervalos determinados por estes puntos (ilustración 17). Unha vez identificados os extremos relativos obtemos a coordenada y de ditos puntos:

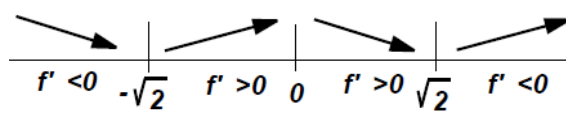


Ilustración 17: Esquema da monotonía da función f

- $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4(\sqrt{2})^2 = 4 - 4 \cdot 2 = -4$
- $f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 = 4 - 4 \cdot 2 = -4$
- $f(0) = 0$

Polo tanto, f é decrecente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ e crecente en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, ten un máximo relativo en $(0,0)$ e mínimos en $(-\sqrt{2}, -4)$ e $(\sqrt{2}, -4)$.

5. Curvatura e puntos de inflexión:

Calculamos a derivada segunda e igualámola a 0 para obter os posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 8 \cdot 1 = 12x^2 - 8$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 8 = 0 \rightarrow 12x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{12} \rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Estúdase a concavidade e convexidade nos intervalos determinados por estes puntos (ilustración 18).

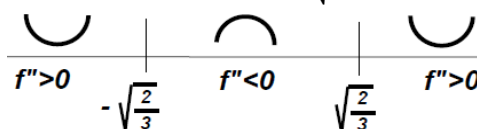


Ilustración 18: Esquema da curvatura da función f

Calculamos a coordenada y dos puntos de inflexión.

- $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 - 4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{24}{9} = -\frac{20}{9}$
- $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 - 4\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{24}{9} = -\frac{20}{9}$

f é convexa en $(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty)$ e cóncava en $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$, ten puntos de inflexión en $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9})$ e $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9})$.

6. f non ten asíntotas porque é un polinomio, pero ten ramas parabólicas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



7. Representación gráfica:

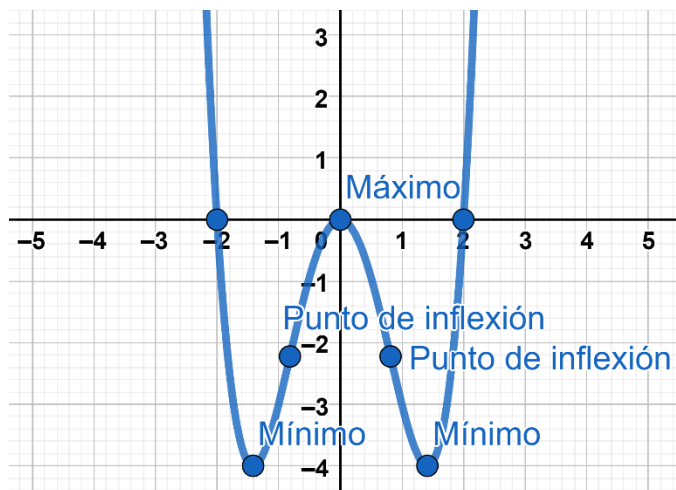


Ilustración 19: Gráfica da función $f(x) = x^4 - 4x^2$

Licenzas das ilustracións

Ilustración	Recurso
Ilustración 1. Taxa de variación media	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 2. Aproximación da pendente da recta tanxente	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 3. Función crecente	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 4. Función decrecente	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 5. Comportamento da derivada dunha función crecente.	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 6. Comportamento da derivada dunha función decrecente.	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 7. Esquema de estudo do signo da derivada	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 8. Función cun máximo	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 9. Función cun mínimo	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 10: Esquema dun máximo	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 11: Esquema dun mínimo	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 12: Esquema dos signos da derivada de f	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 13: Función convexa	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 14: Función cóncava	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 15: Función cóncava e convexa	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 16: Esquema do signo da segunda derivada de f	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 17: Esquema da monotonía da función f	Autoría: Licencia: Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 18: Esquema da curvatura da función f	Autoría: Licencia:



	Procedencia: Guías para o bacharelato (LOMCE), Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades.
Ilustración 19: Gráfica da función $f(x) = x^4 - 4x^2$	Autoría: Elaboración propia