ECUACIÓNS, INECUACIÓNS E SISTEMAS

Exercicios autoavaliables

1. Resolve as seguintes ecuacións:
   a. $\frac{x-2}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x-4}{8}$
   b. $\frac{(x-2)^2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2-x}{2}$
   c. $x^4-15x^2-16=0$
   d. $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$
   e. $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}+\frac{x+6}{6-x}$
   f. $x+\sqrt{7-3x}=1$
   g. $\log x^2-\log(x+6)=\log 2^3$
   h. $3^{x+3}-3^{x-1}=80$
2. Resolve as seguintes inecuacións:
   a. $-\frac{x}{4}-4\geq\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}$
   b. $x^2-3x+2\geq 0$
3. Resolve os seguintes sistemas:
   a. $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1-\frac{1}{xy}\\ xy=6\end{cases}$
   b. $\begin{cases}x+5y+3z=5\\ 2x+y-z=11\\ 3x-4y-2z=2\end{cases}$
4. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións:
   a. $\begin{cases}2(x+1)\leq 2-x\\ -3x+5\geq -4x+4\end{cases}$
   b. $\begin{cases}3x-y<3\\ x\geq 1\end{cases}$
5. A raíz cadrada da idade dun pai dá a idade do seu fillo. Ao cabo de 24 anos a idade do pai será o dobre ca do seu fillo. Cantos anos ten cada un?
6. Nunha caixa hai parafusos defectuosos e non defectuosos. Sabemos que en total hai 200 parafusos e que o triplo de defectuosos é menor que o número de non defectuosos. Cantos parafusos defectuosos pode ter a caixa?
7. Queremos repartir 330 euros entre tres persoas de tal forma que a primeira reciba 20 euros máis ca segunda e a terceira a metade do que recibiron entre as outras dúas. Que cantidade recibe cada un?

Solucións

1. Resolve as seguintes ecuacións:

a. $\frac{x-2}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x-4}{8}$

Multiplicamos polo $mcm(2,4,8)=2^3=8$

$$2\cdot 4\cdot\frac{x-2}{2}-4\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=8\cdot\frac{x-4}{8}\xrightarrow{simplificamos}4\cdot(x-2)-2=x-4\rightarrow 4x-8-2=x-4\rightarrow$$

$$\rightarrow 4x-x=10-4\rightarrow 3x=6\rightarrow x=2$$

b. $\frac{(x-2)^2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2-x}{2}$

Multiplicamos polo $mcm(2,3,6)=2\cdot 3=6$ *e desenvolvemos a identidade notable:*
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\rightarrow(x-2)^2=x^2-4x+4$

$$6\cdot\frac{x^2-4x+4}{6}+2\cdot 3\cdot\frac{1}{3}=3\cdot 2\cdot\frac{2-x}{2}\xrightarrow{simplificamos}x^2-4x+4+2=6-3x\xrightarrow{\substack{todos\ os\ termos\\ ao\ lado\ esquerdo}}$$

$$\rightarrow x^2-4x+3x+6-6=0\rightarrow x^2-x=0\xrightarrow{\substack{sacamos\\ factor\ común}}x(x-1)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-1=0\rightarrow x=1\end{cases}$$

c. $x^4-15x^2-16=0$

Facemos o cambio de variable $t=x^2\rightarrow t^2-15t-16=0$

$$t=\frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot 1\cdot(-16)}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{289}}{2}=\frac{15\pm 17}{2}=\begin{cases}\frac{15+17}{2}=16\\ \frac{15-17}{2}=-1\end{cases}$$

Desfacemos o cambio de variable:

- *Se* $t=16\rightarrow x^2=16\rightarrow x=\pm\sqrt{16}\rightarrow x=\pm 4$
- *Se* $t=-1\rightarrow x^2=-1\rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$ *non ten solución real.*

d. $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$

Como se trata dunha ecuación de grao 4 (non bicadrada) temos que factorizar o polinomio
$P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$
$D(6)=\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6\}$

	1	−5	5	5	−6
1		1	−4	1	6
	1	−4	1	6	0
−1		−1	5	−6	
	1	−5	6	0	
2		2	−6		
	1	−3	0		

$P(x)=(x-1)(x^3-4x^2+x+6)$

$P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-5x+6)$

$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$

e. $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}+\frac{x+6}{6-x}$

Multiplicamos polo $mcm(x-6,2,6)=6\cdot(x-6)$*:*

$$6\cdot(x-6)\cdot\frac{x}{x-6}-3\cdot 2\cdot(x-6)\cdot\frac{1}{2}=6\cdot(x-6)\cdot\frac{x}{6}+6\cdot(x-6)\cdot\frac{x+6}{-(x-6)}\xrightarrow{simplificamos}$$

$6x-3(x-6)=x(x-6)-6(x+6) \rightarrow 6x-3x+18=x^2-6x-6x-36 \rightarrow$
$0=x^2-15x-54$

$$x=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot(-54)}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{441}}{2}=\frac{15\pm 21}{2}=\begin{cases}\frac{15+21}{2}=18\\ \frac{15-21}{2}=-3\end{cases}$$

Comprobación:

- $x=18 \rightarrow \frac{18}{18-6}-\frac{1}{2}=\frac{18}{6}+\frac{18+6}{6-18} \rightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{2}=3-2 \rightarrow 1=1$ *é válida.*
- $x=-3 \rightarrow \frac{-3}{-3-6}-\frac{1}{2}=\frac{-3}{6}+\frac{-3+6}{6} \rightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{6}=0$ *non é válida.*

f. $x+\sqrt{7-3x}=1$

Illamos a raíz e elevamos ao cadrado:

$$\left(\sqrt{7-3x}\right)^2=(1-x)^2 \xrightarrow[(1-x)^2=1-2x+x^2]{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2} 7-3x=1-2x+x^2 \rightarrow 0=x^2+x-6$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-6)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{-1+5}{2}=2\\ \frac{-1-5}{2}=-3\end{cases}$$

Comprobamos as solucións:

- *Se* $x=2 \rightarrow 2+\sqrt{7-3\cdot 2}=1 \rightarrow 2+1=1 \rightarrow 3=1$ *non é certo, logo non é solución.*
- *Se* $x=-3 \rightarrow -3+\sqrt{7-3(-3)}=1 \rightarrow -3+4=1 \rightarrow 1=1$ *é certo, logo é solución.*

g. $\log x^2-\log(x+6)=\log 2^3$

Agrupamos os logaritmos nun só, utilizando a propiedade $log_a x-log_a y=log_a\frac{x}{y}$ *e comparamos:*

$$log\frac{x^2}{x+6}=log\, 2^3 \rightarrow \frac{x^2}{x+6}=8 \rightarrow x^2=8(x+6) \rightarrow x^2=8x+48 \rightarrow x^2-8x-48=0$$

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot(-48)}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{256}}{2}=\frac{8\pm 16}{2}=\begin{cases}\frac{8+16}{2}=12\\ \frac{8-16}{2}=-4\end{cases}$$

Comprobamos as solucións:

- *Se* $x=12 \rightarrow log\, 12^2-log\, 18=log\, 8 \rightarrow log\frac{144}{18}=log\, 8 \rightarrow log\, 8=log\, 8$ *é certo, logo é solución.*
- *Se* $x=-4 \rightarrow log(-4)^2-log\, 2=log\, 8 \rightarrow log\frac{16}{2}=log\, 8 \rightarrow log\, 8=log\, 8$ *é certo, logo é solución.*

h. $3^{x+3}-3^{x-1}=80$

Utilizamos as propiedades $a^{b+c}=a^b\cdot a^c$ *e* $a^{b-c}=\frac{a^b}{a^c}$*:*

$$3^x\cdot 3^3-\frac{3^x}{3^1}=80 \xrightarrow{\cdot 3} 3^x\cdot 3^4-3^x=3\cdot 80 \rightarrow 3^x(81-1)=240 \rightarrow 3^x=\frac{3\cdot 80}{80} \rightarrow 3^x=3 \rightarrow x=1$$

2. Resolve as seguintes inecuacións:

a. $-\frac{x}{4}-4\geq\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}$

Multiplicamos polo $mcm(3,4,6)=12$*:*

$$-3\cdot 4\cdot\frac{x}{4}-4\cdot 12\geq 4\cdot 3\cdot\frac{5x}{3}-2\cdot 6\cdot\frac{1}{6} \xrightarrow{simplificamos} -3x-48\geq 20x-2 \rightarrow -23x\geq 46 \rightarrow$$

$x \leq \frac{46}{-23} \rightarrow x \leq -2$

Solución: $x \in (-\infty, -2]$

b. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

Resolvemos a ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$*:*

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Estudamos o signo nos intervalos resultantes:

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$x = 1$	$(1, 2)$	$x = 2$	$(2, \infty)$
Signo	$+$	0	$-$	0	$+$

Solución: $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

3. Resolve os seguintes sistemas:

a. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$

Dado que se trata dun sistema non lineal, resolverémolo por substitución. $\left(y = \frac{6}{x} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{6}\right)$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases} \xrightarrow[e \text{ substituímola en } E_1]{\text{despexamos } y \text{ en } E_2} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{x}{6} = 1 - \frac{x}{6x} \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{x}{6} = 1 - \frac{x}{6x} \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \xrightarrow[6x \cdot E_1]{mcm(6,x,6x)=6x}$$

$$\begin{cases} 6 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot x \cdot \frac{x}{6} = 6x - 6x \cdot \frac{x}{6x} \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \xrightarrow{simplificamos} \begin{cases} 6 + x^2 = 6x - x \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$$

Resolvemos E_1*:*

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Substituímos x *en* E_2 *para calcular* y*:*

- *Se* $x = 3 \rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$
- *Se* $x = 2 \rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$

Solucións: $(x, y) = \{(3,2), (2,3)\}$

b. $\begin{cases} x+5y+3z=5 \\ 2x+y-z=11 \\ 3x-4y-2z=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+5y+3z=5 \\ 2x+y-z=11 \\ 3x-4y-2z=2 \end{cases} \xrightarrow[E_3-3E_1]{E_2-2E_1} \begin{cases} x+5y+3z=5 \\ -9y-7z=1 \\ -19y-11z=-13 \end{cases} \xrightarrow{E_3-\frac{19}{9}E_2} \begin{cases} x+5y+3z=5 \\ -9y-7z=1 \\ \frac{34}{9}z=-\frac{136}{9} \end{cases} \xrightarrow{resolvemos}$$

$$\begin{cases} x+5\cdot 3+3\cdot(-4)=5 \to x=2 \\ -9y-7\cdot(-4) \qquad =1 \to y=3 \\ z=-4 \end{cases}$$

Solución: $(x,y,z=(2,3,-4)$

Explicación detallada:

Temos que eliminar x *das ecuacións* E_2 *e* E_3 *aplicando o método de redución:*

- *Para eliminar* x *de* E_2*:*
  $$\begin{cases} -2x-10y-6z=-10\ (-2E_1) \\ 2x+y-z=11\ (E_2) \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -9y-7z=1\ (E_2)$$
- *Para eliminar* x *de* E_3*:*
  $$\begin{cases} -3x-15y-9z=-15\ (-3E_1) \\ 3x-4y-2z=2\ (E_3) \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -19y-11z=-13\ (E_3)$$

Sistema resultante:

$$\begin{cases} x+5y+3z=5\ (E_1) \\ -9y-7z=1\ (E_2) \\ -19y-11z=-13\ (E_3) \end{cases}$$

Agora temos que eliminar y *da ecuación* E_3*:*

$$\begin{cases} 19y+\frac{133}{9}z=-\frac{19}{9}\ \left(-\frac{19}{9}E_2\right) \\ -19y-11z=-13\ (E_3) \end{cases} \xrightarrow{sumamos} \frac{133}{9}z-11z=-\frac{19}{9}-13 \xrightarrow{\cdot 9}$$

$$133z-99z=-19-117 \to 34z=-136$$

Sistema resultante:

$$\begin{cases} x+5y+3z=5\ (E_1) \\ -9y-7z=1\ (E_2) \\ 34z=-136\ (E_3) \end{cases}$$

Por último, procederíamos a resolver as ecuación empezando por E_3 *e rematando por* E_1*, como se fixo na 1ª resolución.*

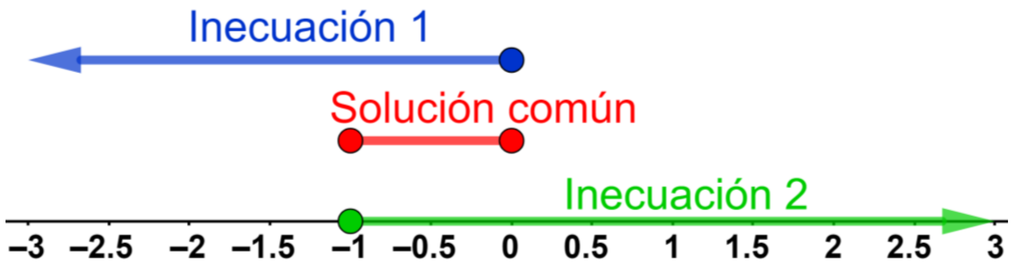
4. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións:

a. $\begin{cases} 2(x+1)\le 2-x \\ -3x+5\ge -4x+4 \end{cases}$

Resolvemos cada inecuación por separado:

$$\begin{cases} 2(x+1)\le 2-x \to 2x+2\le 2-x \to 2x+x\le 2-2 \to 3x\le 0 \to x\le 0 \\ -3x+5\ge -4x+4 \to 4x-3x\ge 4-5 \to x\ge -1 \end{cases}$$

Representamos ambas solucións e buscamos a solución común.



Solución: $x \in [-1{,}0]$

b. $\begin{cases} 3x - y < 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$

① Representamos a recta $3x - y = 3 \rightarrow y = 3x - 3$.

Facemos unha táboa de valores:

x	0	1
y	-3	0

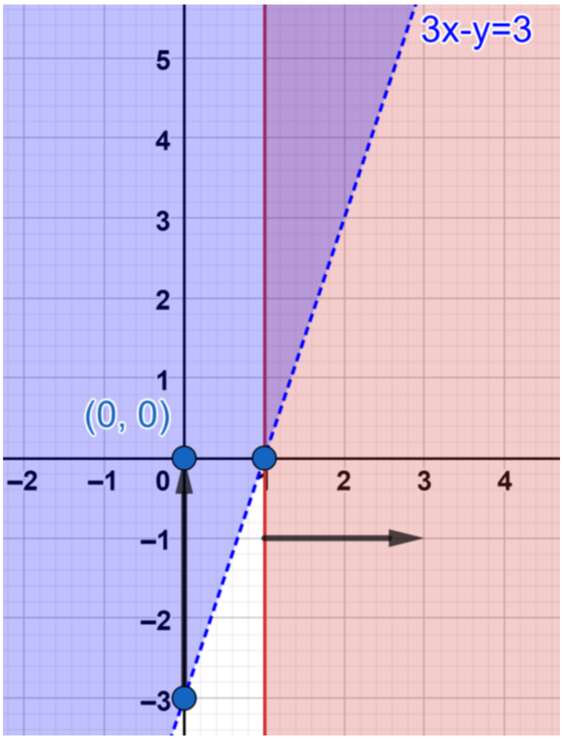
Como a inecuación ten a desigualdade $<$ a recta non é parte do semiplano, logo representarémola cunha liña descontinua.

Agora, escollemos un punto de fora da recta, por exemplo o $(0{,}0)$, e substituímolo na inecuación:

$0 - 0 < 3$, *é certo, logo a solución é o semiplano no que está o* $(0{,}0)$

② Representamos a recta $x = 1$. Como a desigualdade é $\geq$ a recta está incluída na inecuación e polo tanto, representámola cunha liña continua.

De novo, substituímos o $(0{,}0)$: $0 > 1$, é falso, logo a solución é o semiplano contrario ao do $(0{,}0)$.



Por último representamos ambas inecuacións xuntas e a área común será a solución.

5. A raíz cadrada da idade dun pai dá a idade do seu fillo. Ao cabo de 24 anos a idade do pai será o dobre ca do seu fillo. Cantos anos ten cada un?

	Actualmente	***Dentro de 24 anos***
Idade do pai	x	$x + 24$
Idade do fillo	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x} + 24$

$$x + 24 = 2\left(\sqrt{x} + 24\right) \rightarrow x + 24 = 2\sqrt{x} + 48 \xrightarrow[a\ raíz]{Illamos} (x - 24)^2 = \left(2\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow$$

$$x^2 - 48x + 576 = 4x \rightarrow x^2 - 52x + 576 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-52) \pm \sqrt{(-52)^2 - 4 \cdot 576}}{2} = \frac{52 \pm \sqrt{400}}{2}$$

$$= \frac{52 \pm 20}{2} = \begin{cases} \dfrac{52 + 20}{2} = 36 \\ \dfrac{52 - 20}{2} = 16 \end{cases}$$

Comprobación:

- *Se* $x = 36 \to 36 + 24 = 2\left(\sqrt{36} + 24\right) \to 60 = 60$ *é certo, logo* $x = 36$ *é solución.*
- *Se* $x = 16 \to 16 + 24 = 2\left(\sqrt{16} + 24\right) \to 40 = 56$ *non é certo, logo* $x = 16$ *non é solución.*

Solución: o pai ten 36 anos e o fillo 6 anos.

6. Nunha caixa hai parafusos defectuosos e non defectuosos. Sabemos que en total hai 200 parafusos e que o triplo de defectuosos é menor que o número de non defectuosos. Cantos parafusos defectuosos pode ter a caixa?

Sexa x: $nº\ de\ parafusos\ defectuosos,$ *entón* $210 - x$: $nº\ de\ parafusos\ non\ defectuosos.$

$$3x < 200 - x \to 3x + x < 200 \to 4x < 200 \to x < \frac{200}{4} \to x < 50$$

Solución: a caixa pode ter ata 50 parafusos defectuosos

7. Queremos repartir 330 euros entre tres persoas de tal forma que a primeira reciba 20 euros máis ca segunda e a terceira a metade do que recibiron entre as outras dúas. Que cantidade recibe cada un?

Sexan, x: $cartos\ que\ recibe\ a\ 1ª\ persoa$ y: $cartos\ que\ recibe\ a\ 2ª$, z: $cartos\ que\ recibe\ a\ 3ª$

$$\begin{cases} x + y + z = 330 \\ x = y + 20 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \xrightarrow{2\cdot E_3} \begin{cases} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow[E_3 - E_1]{E_2 - E_1} \begin{cases} x + y + z = 330 \\ -2y - z = -310 \\ -3z = -330 \end{cases} \xrightarrow{resolvemos}$$

$$\begin{cases} x + 100 + 110 = 330 \to x = 120 \\ -2y - 110 = -310 \to y = 100 \\ z = 110 \end{cases}$$

Solución: a primeira persoa recibe 120€, a segunda 100€ e a terceira 110€.