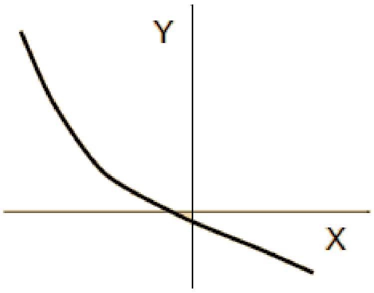
FUNCIÓNS

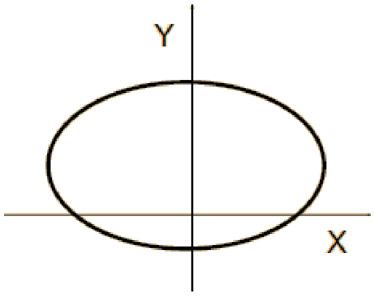
Exercicios autoavaliables

1. Nas gráficas das seguintes figuras, indica cal é función e cal non:

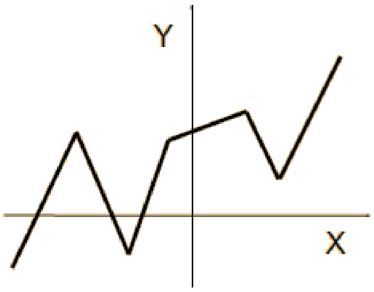
a.



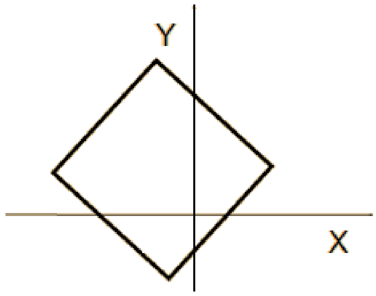
b.



c.



d.

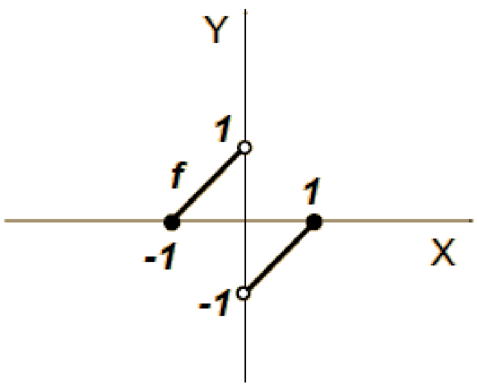


2. Expresa as seguintes funcións mediante a súa fórmula:

a. A regra que asigna a cada número real x a súa cuarta parte.
b. A regra que asigna a cada número real x a súa raíz cadrada. A que números se lles pode aplicar esta regra ou función?
c. A regra que asigna a cada número real x o seu triplo máis 5 unidades.

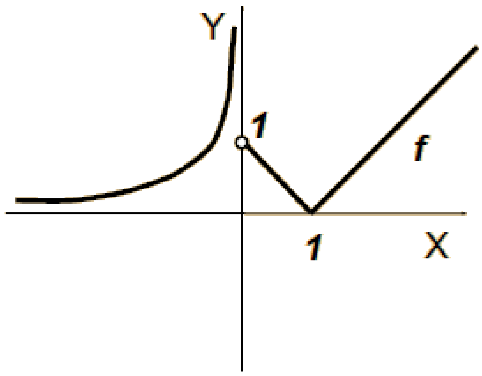
3. Para as seguintes funcións, indica cal é o dominio e cal a imaxe, a partir da súa gráfica:

a.



$Dom\, f =$
$Im\, f =$

b.



$Dom\, f =$
$Im\, f =$

4. Calcula o dominio de definición das seguintes funcións:

a. $f(x) = \frac{3}{x^2-5x+6}$
b. $f(x) = \sqrt{2x-4}$
c. $f(x) = \log_2 1 - x$
d. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$
e. $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$
f. $f(x) = \ln(x^2-1)$
g. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
h. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

5. Estude as simetrías e obteña os puntos de corte cos eixes das seguintes funcións:

a. $f(x) = x^4 - 2x^2$
b. $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
c. $h(x) = 2x^3 + 4x$
d. $i(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

6. Sexan as funcións $f(x) = x^2 + x + 1, g(x) = x^2 - 4$ e $h(x) = x + 2$. Efectúa as seguintes operacións e indica o dominio de definición das funcións resultantes:

a. $(f+g)(x)$
b. $(f-g)(x)$
c. $(g \cdot h)(x)$
d. $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$

7. Sexan $f(x) = \frac{2x-5}{2}, g(x) = \frac{2}{x+1}, h(x) = \frac{x+1}{3}$ e $i(x) = \sqrt{3-3x}$ calcule:

a. $(g \circ f)(x)$
b. $(f \circ g)(x)$
c. $(h \circ i)(x)$
d. $(i \circ h)(x)$
e. $(f \circ i)(x)$
f. $(g \circ h)(x)$

8. Calcula as inversas das seguintes funcións e comprobe os resultados:

a. $f(x) = \frac{2x-5}{3}$
b. $g(x) = \frac{2}{x+1}$
c. $h(x) = 3 + \frac{2}{x}$
d. $i(x) = \sqrt{3-3x}$

9. Pescuda período da seguintes funcións:

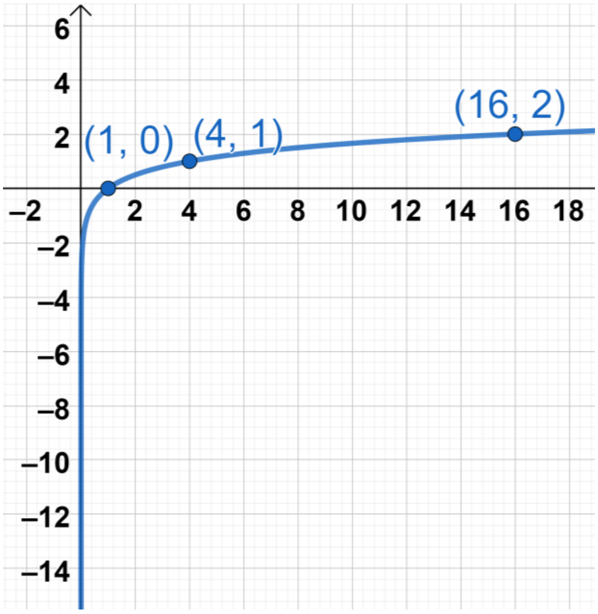
a. $f(x) = \cos\frac{x}{6}$
b. $g(x) = \tan 7x$
c. $h(x) = \sin 2x$

10. Represente as seguintes parábolas:

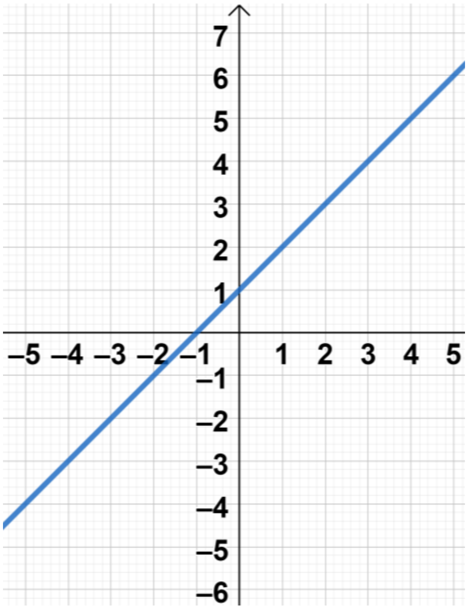
a. $y = x^2 + 2x$
b. $y = -x^2 - 6x - 5$
c. $y = x^2 - 6x$
d. $y = x^2 - 9$

11. Identifique de que tipo de función se trata e asocie cada gráfica ca súa expresión. Xustifique a súa resposta con algunha característica distintiva da función.

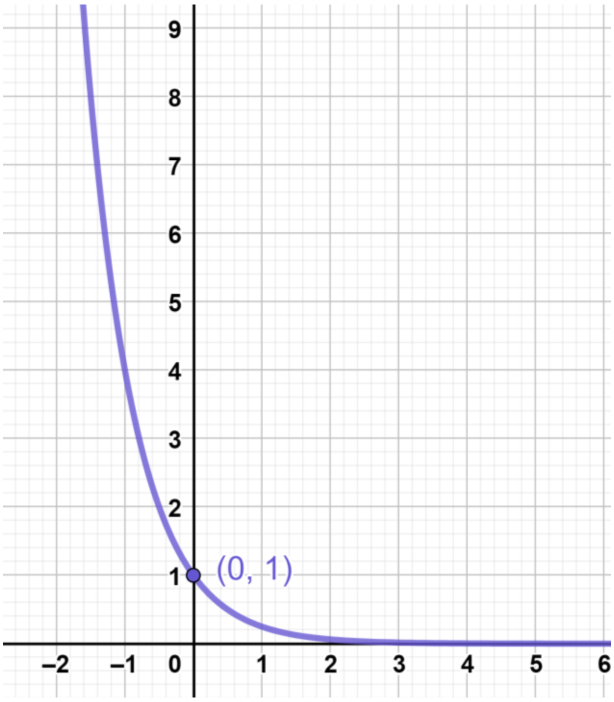
a. $y = 2/x$
b. $y = x + 1$
c. $y = -2x + 1$
d. $y = -2/x$
e. $y = x^2 - 4x + 1$
f. $y = -2x^2 + 2x + 1$
g. $y = \log_3 x$
h. $y = \log_4 x$
i. $y = 3^x$
j. $y = 0{,}25^x$



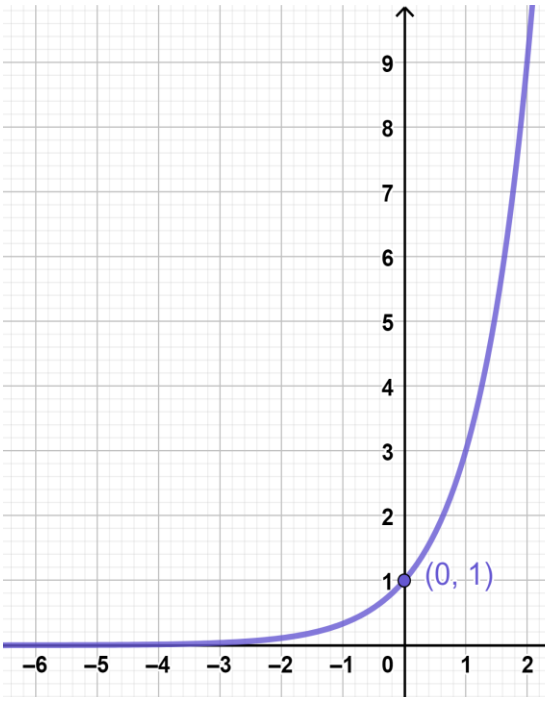
Ecuación:



Ecuación:

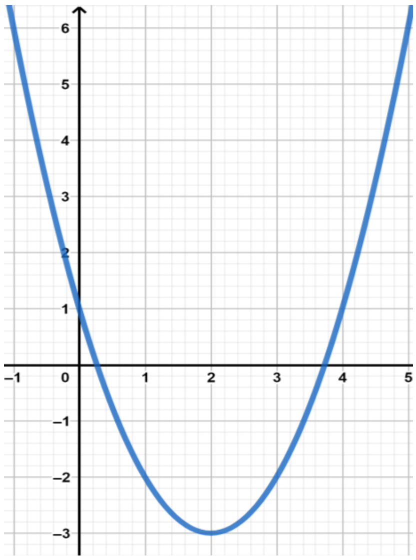


Ecuación:

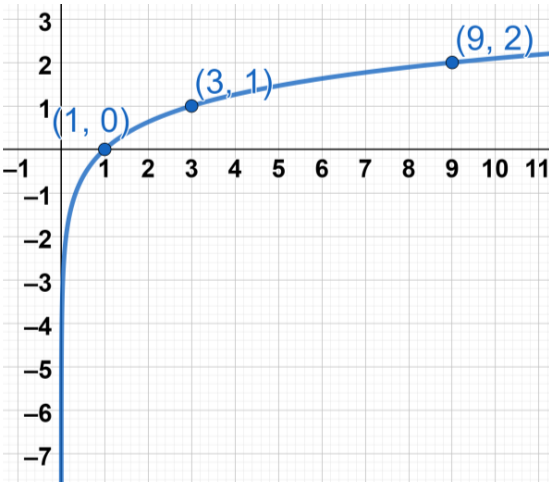


Ecuación:

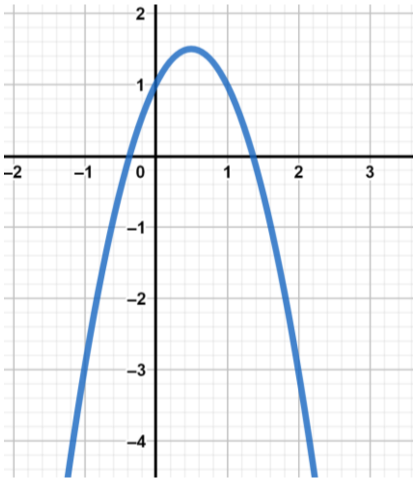
Ecuación:



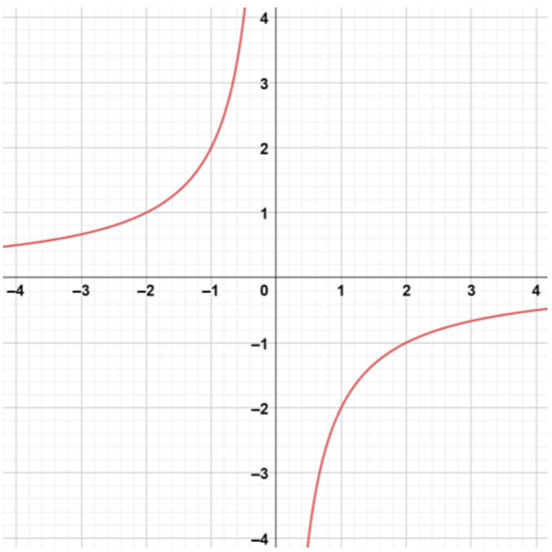
Ecuación:



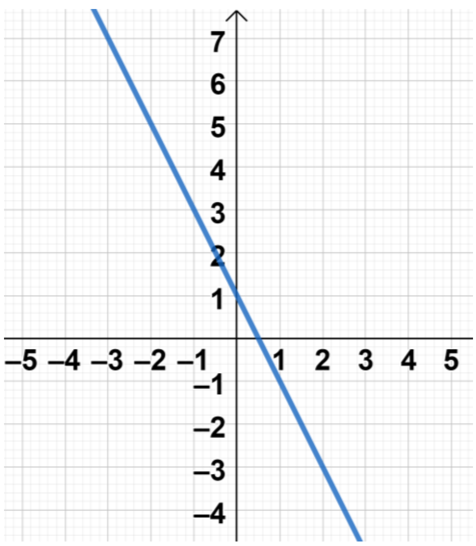
Ecuación:



Ecuación:



Ecuación:



Ecuación:

12. Representa as seguintes funcións:

a. $y = 4^x$
b. $y = \log_3 x$
c. $y = -\frac{3}{x}$
d. $y = \sqrt{x+2}$
e. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
f. $y = \log_4 x$
g. $y = \frac{3}{x}$
h. $y = -\sqrt{x+2}$

13. Representa as seguintes funcións definidas a anacos. A partir das gráficas, indica cal é o dominio e a imaxe de cada función:

a. $f(x) = \begin{cases} -x \; se \; x < 0 \\ 1 \; se \; 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} \; se \; x \geq 1 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} -x^2 \; se \; x < 0 \\ 2 \; se \; 1 < x \leq 2 \\ -x + 4 \; se \; x > 2 \end{cases}$

14. Escribe as seguintes funcións como funcións a anacos e representa:

a. $y = |1 - x|$

b. $y = |x^2 - 4|$

15. Un estudo de mercado para o lanzamento de teléfonos móbiles obtivo que a función demanda do devandito produto en función do prezo (en €), x, é $f_d(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 11250$ e a función oferta $f_o(x) = \frac{7}{18}x^2$. A que prezo deben venderse os teléfonos móbiles para que a demanda iguale á oferta?

16. Nunha tenda A venden a 2€/kg de laranxas e cobran 1€ pola malla. Noutra tenda B véndenas a 2,5€/kg pero non cobran a malla.

a. Escribe as ecuacións que relacionan o prezo P en función dos kg comprados, x.
b. Representa ambas funcións e analiza a partir de cantos kg compensa comprar na tenda B.

17. A altura, h, á que se atopa en cada instante, t, unha pedra que lanzamos verticalmente cara arriba vén dada pola función $h(t) = 20t - 5t^2, t \geq 0$.

a. En que instante alcanza a altura máxima?
b. Cal é a altura máxima alcanzada pola pedra?
c. En que momento toca o chan?

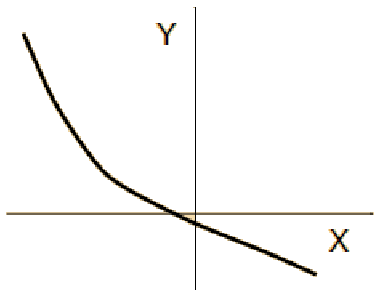
18. Nun laboratorio estanse cultivando un tipo de bacterias. O crecemento do cultivo vén dado pola función $f(t) = 7500 \cdot 2^{\frac{t}{18}}$, onde t é o tempo en minutos. Calcula o tamaño da poboación ao cabo de 36 minutos, 3 horas e 1 día.

19. Poñemos ao lume un cazo con auga que está, inicialmente, a $20℃$. Tras 10 minutos comeza a ferver. Nese momento botamos pasta e a temperatura descende a $80℃$. Ao cabo de 2 minutos volve a ferver e mantense así durante 8 minutos. Describe esta situación gráfica e analiticamente.

Solucións

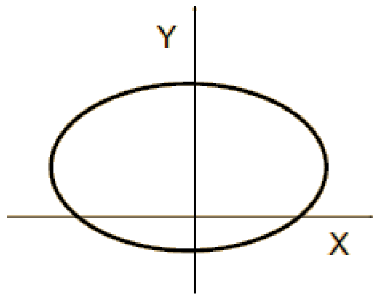
1. Nas gráficas das seguintes figuras, indica cal é función e cal non:

a.



Sí, é función.

b.

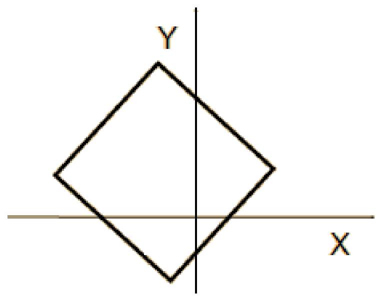


Non é función, porque hai certos valores de x *aos que lles corresponden dous valores de* y *distintos.*

c.

Sí, é función

d.



Non é función, porque hai certos valores de x *aos que lles corresponden dous valores de* y *distintos.*

2. Expresa as seguintes funcións mediante a súa fórmula:

a. A regra que asigna a cada número real x a súa cuarta parte.

$$y = \frac{x}{4}$$

b. A regra que asigna a cada número real x a súa raíz cadrada. A que números se lles pode aplicar esta regra ou función?

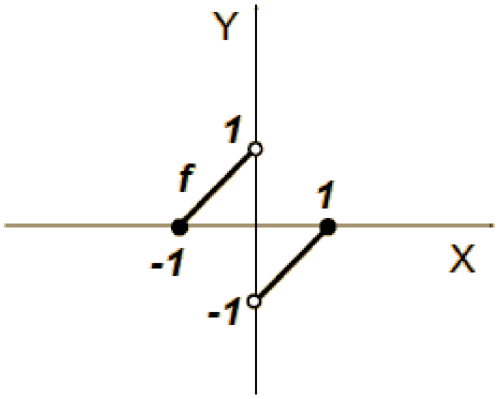
$$y = \sqrt{x}, x \geq 0$$

c. A regra que asigna a cada número real x o seu triplo máis 5 unidades.

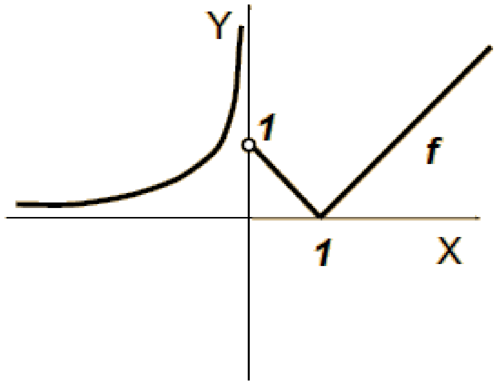
$$y = 3x + 5$$

3. Para as seguintes funcións, indica cal é o dominio e cal a imaxe, a partir da súa gráfica:

a.



b.



$\text{Dom f} = [-1,0) \cup (0,1] = [-1,1] - \{0\}$

$\text{Im f} = (-1,1)$

$\text{Dom f} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - \{0\}$

$\text{Im f} = [0, \infty)$

4. Calcula o dominio de definición das seguintes funcións:

a. $f(x) = \frac{3}{x^2-5x+6}$

Como a función ten un denominador, descartaremos aqueles valores nos que o denominador valga 0.

Para atopar ditos valores temos que resolver a ecuación $\text{x}^2 - 5\text{x} + 6 = 0$

$$\text{x} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Entón, $\text{Dom f} = \mathbb{R} - \{2,3\}$

b. $f(x) = \sqrt{2x-4}$

Como a función ten unha raíz, quedarémonos con aqueles valores nos que o radicando sexa non negativo. Para atopar ditos valores temos que resolver a inecuación $2\text{x} - 4 \geq 0$

$$2\text{x} - 4 \geq 0 \rightarrow 2\text{x} \geq 4 \rightarrow \text{x} \geq 2$$

Entón, $\text{Dom f} = [2, \infty)$

c. $f(x) = \log_2 1 - x$

Como a función ten un logaritmo, quedarémonos con aqueles valores nos que o radicando sexa positivo. Para atopar ditos valores temos que resolver a inecuación $1 - \text{x} > 0$

$$1 - \text{x} > 0 \rightarrow 1 > \text{x} \rightarrow \text{x} < 1$$

Entón, $\text{Dom f} = (-\infty, 1)$

d. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

Como a función ten un denominador, descartaremos aqueles valores nos que o denominador valga 0. Para atopar ditos valores temos que resolver a ecuación $\mathrm{x}^2 - 4 = 0$.

$$\mathrm{x}^2 - 4 = 0 \rightarrow \mathrm{x}^2 = 4 \rightarrow \mathrm{x} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Entón, $\mathrm{Dom\ f} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

e. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

Como a función ten unha raíz, quedarémonos con aqueles valores nos que o radicando sexa non negativo. Para atopar ditos valores temos que resolver a inecuación $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} \geq 0$.

Como é unha inecuación de 2º grao, primeiro temos que resolver a ecuación $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} = 0$

$$\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} = 0 \rightarrow \mathrm{x}(\mathrm{x}+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = 0 \\ \mathrm{x} + 2 = 0 \rightarrow \mathrm{x} = -2 \end{cases}$$

E despois estudar o signo nos intervalos resultantes:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$\mathbf{x = -2}$	$(-2, 0)$	$\mathbf{x = 0}$	$(0, \infty)$
Signo	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

Entón, $\mathrm{Dom\ f} = (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$

f. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

Como a función ten un logaritmo, quedarémonos con aqueles valores nos que o radicando sexa positivo. Para atopar ditos valores temos que resolver a inecuación $\mathrm{x}^2 - 1 > 0$.

Ao tratarse dunha inecuación de 2º grao, primeiro temos que resolver a ecuación $\mathrm{x}^2 - 1 = 0$

$$\mathrm{x}^2 - 1 = 0 \rightarrow \mathrm{x}^2 = 1 \rightarrow \mathrm{x} = \pm 1$$

E despois estudar o signo nos intervalos resultantes:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$\mathbf{x = -1}$	$(-2, 0)$	$\mathbf{x = 1}$	$(1, \infty)$
Signo	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

Entón, $\mathrm{Dom\ f} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

g. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Como a función ten un denominador, descartaremos aqueles valores nos que o denominador valga 0. Para atopar ditos valores temos que resolver a ecuación $\mathrm{x}^2 + 1 = 0$

$\mathrm{x}^2 + 1 = 0 \rightarrow \mathrm{x}^2 = -1 \rightarrow \mathrm{x} = \pm\sqrt{-1}$ *non é un número real (a ecuación non ten solución)*

Posto que non hai ningún valor que anule o denominador, $\mathrm{Dom\ f} = \mathbb{R}$.

h. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

Como a función ten un denominador, descartaremos aqueles valores nos que o denominador valga 0. Ademais, o denominador ten unha raíz, polo que temos que buscar valores para os que o radicando é non negativo. Xuntando ambas condicións obtemos que o radicando ten que ser positivo. Resolvemos a inecuación $x^2 - 1 > 0$.

Dita inecuación xa foi resolta o apartado f. Deducimos que, $\mathrm{Dom}\, f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

5. Estude as simetrías e obteña os puntos de corte cos eixes das seguintes funcións:

a. $f(x) = x^4 - 2x^2$

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x) \rightarrow f$ *é par*

Cortes cos eixes:

-OX(y=0): $x^4 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 \cdot (x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow \left(-\sqrt{2}, 0\right), \left(\sqrt{2}, 0\right) \end{cases}$

-OY(x=0): $f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0 \rightarrow (0,0)$

b. $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

$g(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = g(x) \rightarrow$ *g é par*

Cortes cos eixes:

-OX(y=0):

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \cdot (x^2 + 1) \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$$

-OY(x=0): $g(0) = \frac{0^2}{0^2+1} = 0 \rightarrow (0,0)$

c. $h(x) = 2x^3 + 4x$

$h(-x) = 2(-x)^3 + 4(-x) = -2x^3 - 4x \neq h(x) \rightarrow$ *h non é par*

$-h(-x) = 2x^3 + 4x = h(x) \rightarrow$ *h é impar*

Cortes cos eixes:

-OX(y=0):

$$2x^3 + 4x = 0 \rightarrow 2x(x^2 + 2) \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \end{cases}$$

-OY(x=0): $h(0) = 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0,0)$

d. $i(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$i(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 - 5(-x) + 6 = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6 \neq i(x) \rightarrow$ *i non é par*

$-\mathrm{i}(-\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} - 6 \neq \mathrm{i}(\mathrm{x}) \rightarrow$ *i non é impar*

i(x) non ten simetrías.

Cortes cos eixes:

-OX(y=0): $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

	1	-2	-5	6
1	↓	1	-1	-6
	1	-1	-6	$\boxed{0}$
-2	↓	-2	6	
	1	-3	$\boxed{0}$	

$$(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}-1=0 \rightarrow \mathrm{x}=1 \rightarrow (1,0) \\ \mathrm{x}+2=0 \rightarrow \mathrm{x}=-2 \rightarrow (-2,0) \\ \mathrm{x}-3=0 \rightarrow \mathrm{x}=3 \rightarrow (3,0) \end{cases}$$

-OY(x=0): $\mathrm{i}(0) = 0^3 - 2\cdot 0^2 - 5\cdot 0 + 6 = 6 \rightarrow (0,6)$

6. Sexan as funcións $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 4$ e $h(x) = x + 2$. Efectúa as seguintes operacións e indica o dominio de definición das funcións resultantes:

a. $(f+g)(x)$

$$(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1 + \mathrm{x}^2 - 4 = 2\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - 3$$

$$\mathrm{Dom}\ (\mathrm{f}+\mathrm{g}) = \mathbb{R}$$

b. $(f-g)(x)$

$$(\mathrm{f}-\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1 - (\mathrm{x}^2 - 4) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1 - \mathrm{x}^2 + 4 = \mathrm{x} + 5$$

$$\mathrm{Dom}\ (\mathrm{f}-\mathrm{g}) = \mathbb{R}$$

c. $(g \cdot h)(x)$

$$(\mathrm{g}\cdot\mathrm{h})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x})\cdot\mathrm{h}(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}^2-4)\cdot(\mathrm{x}+2) = \mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} - 8$$

$$\mathrm{Dom}\ (\mathrm{g}\cdot\mathrm{h}) = \mathbb{R}$$

d. $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2+x+1}{x+2}$$

$$Dom\ \left(\frac{f}{h}\right) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

7. Sexan $f(x) = \frac{2x-5}{2}$, $g(x) = \frac{2}{x+1}$, $h(x) = \frac{x+1}{3}$ e $i(x) = \sqrt{3-3x}$ calcule:

a. $(g \circ f)(x)$

$$(\mathrm{g}\circ\mathrm{f})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}\big(\mathrm{f}(\mathrm{x})\big) = \mathrm{g}\left(\frac{2\mathrm{x}-5}{2}\right) = \frac{2}{\frac{2\mathrm{x}-5}{2}+1} = \frac{2}{\frac{2\mathrm{x}-5}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{\mathbf{2}}{\frac{2\mathrm{x}-5+2}{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{4}}{2\mathrm{x}-3}$$

b. $(f \circ g)(x)$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x+1}\right) = \frac{2\cdot\frac{2}{x+1}-5}{2} = \frac{\frac{4-5(x+1)}{x+1}}{2} = \frac{4-5x-5}{2(x+1)} = \frac{-5x-1}{2x+2}$$

c. $(h \circ i)(x)$

$$(h\circ i)(x) = h(i(x)) = h\left(\sqrt{3-3x}\right) = \frac{\sqrt{3-3x}+1}{3}$$

d. $(i \circ h)(x)$

$$(i\circ h)(x) = i(h(x)) = i\left(\frac{x+1}{3}\right) = \sqrt{3-3\left(\frac{x+1}{3}\right)} = \sqrt{3-x-1} = \sqrt{2-x}$$

e. $(f \circ i)(x)$

$$(f\circ i)(x) = f(i(x)) = f\left(\sqrt{3-3x}\right) = \frac{2\left(\sqrt{3-3x}\right)-5}{2} = \frac{2\sqrt{3-3x}-5}{2}$$

f. $(g \circ h)(x)$

$$(g\circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{x+1}{3}\right) = \frac{2}{\frac{x+1}{3}+1} = \frac{\mathbf{2}}{\frac{x+1+3}{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{6}}{x+4}$$

8. Calcula as inversas das seguintes funcións e comprobe os resultados:

a. $f(x) = \frac{2x-5}{3}$

Escríbese a función da forma $y = \frac{2x-5}{3}$ *, intercámbiase* x *por* y *e despéxase* y*:*

$$x = \frac{2y-5}{3} \to 3x = 2y-5 \to 3x+5 = 2y \to \frac{3x+5}{2} = y$$

A función inversa é $f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{2}$.

$$(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{2\cdot\frac{3x+5}{2}-5}{3} = \frac{3x+5-5}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

b. $g(x) = \frac{2}{x+1}$

Escríbese a función da forma $y = \frac{2}{x+1}$ *, intercámbiase* x *por* y *e despéxase* y*:*

$$x = \frac{2}{y+1} \xrightarrow{\text{multiplicamos por } (y+1)} x(y+1) = 2 \to xy + x = 2 \to xy = 2-x \xrightarrow{\div x} y = \frac{2-x}{x}$$

A función inversa é $g^{-1}(x) = \frac{2-x}{x}$

$$(g\circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x)) = \frac{2}{\left(\frac{2-x}{x}\right)+1} = \frac{2}{\frac{2-x+x}{x}} = \frac{2x}{2} = x$$

c. $h(x) = 3 + \frac{2}{x}$

Escríbese a función da forma $y = 3 + \frac{2}{x}$ *, intercámbiase* x *por* y *e despéxase* y*:*

$$x = 3 + \frac{2}{y} \to x - 3 = \frac{2}{y} \xrightarrow{\text{multiplicamos por } y} (x-3)y = 2 \xrightarrow{\div(x-3)} = 2 \to y = \frac{2}{x-3}$$

A función inversa é $h^{-1}(x) = \frac{2}{x-3}$.

$$(h \circ h^{-1})(x) = h\left(h^{-1}(x)\right) = 3 + \frac{2}{\frac{2}{x-3}} = 3 + x - 3 = x$$

d. $i(x) = \sqrt{3-3x}$

Escríbese a función da forma $y = \sqrt{3-3x}$ *, intercámbiase* x *por* y *e despéxase* y*:*

$$x = \sqrt{3-3y} \xrightarrow[\text{cadrado}]{\text{elevamos ao}} x^2 = 3 - 3y \to 3y = 3 - x^2 \xrightarrow{\div 3} y = \frac{3-x^2}{3}$$

A función inversa é $i^{-1}(x) = \frac{3-x^2}{3}$.

$$(i \circ i^{-1})(x) = i\left(i^{-1}(x)\right) = \sqrt{3 - 3\left(\frac{3-x^2}{3}\right)} = \sqrt{3 - 3 + x^2} = \sqrt{x^2} = x$$

9. Pescuda período da seguintes funcións:

a. $f(x) = \cos\frac{x}{6}$

Sabemos que o período da función $y = \cos x$ *é* $T = 2\pi$*. Entón o período de* f *ten que cumprir* $\frac{T}{6} = 2\pi \to T = 12\pi$.

f *é unha función periódica con período* 12π.

b. $g(x) = \tan 7x$

Sabemos que o período da función $y = \tan x$ *é* $T = \pi$*. Entón o período de* g *ten que cumprir* $7T = \pi \to T = \frac{\pi}{7}$.

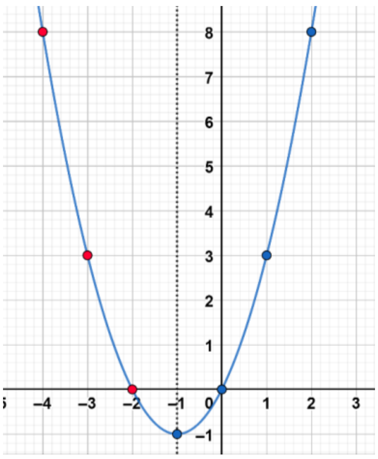
g *é unha función periódica con período* $\frac{\pi}{7}$.

c. $h(x) = \sin 2x$

Sabemos que o período da función $y = \sin x$ *é* $T = 2\pi$*. Entón o período de* h *ten que cumprir* $2T = 2\pi \to T = \pi$.

h *é unha función periódica de período* π.

10. Represente as seguintes parábolas:



a. $y = x^2 + 2x$

i. $a = 1 > 0$

ii. $V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$

$V_y = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1$

$V = (-1, -1)$

iii. *Corte eixe* OX $(y = 0)$:

$$x^2 + 2x = 0 \to x(x+2) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to (0,0) \\ x = -2 \to (-2,0) \end{cases}$$

Corte eixe $OY (x = 0)$: $f(0) = 0 \to (0,0)$

iv. *Táboa de valores:*

x	1	3
y	3	8

b. $y = -x^2 - 6x - 5$

i. $a = -1 < 0$

ii. $V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-2} = -3$

$V_y = f(-3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 5 = 4$

$V = (-3{,}4)$

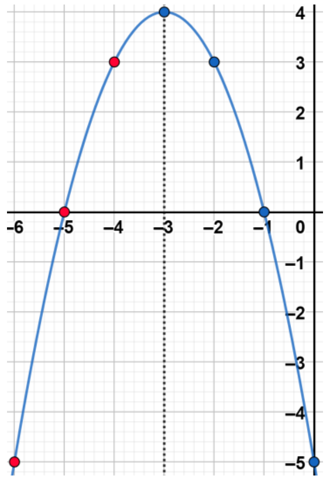
iii. *Corte eixe* OX $(y = 0)$: $-x^2 - 6x - 5 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -5 \rightarrow (-5{,}0) \\ x = -1 \rightarrow (-1{,}0) \end{cases}$$

Corte eixe OY$(x = 0)$: $f(0) = -5 \rightarrow (0, -5)$

iv. *Táboa de valores:*

x	y
−2	3



c. $y = x^2 - 6x$

i. $a = 1 > 0$

ii. $V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$

$V_y = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9$

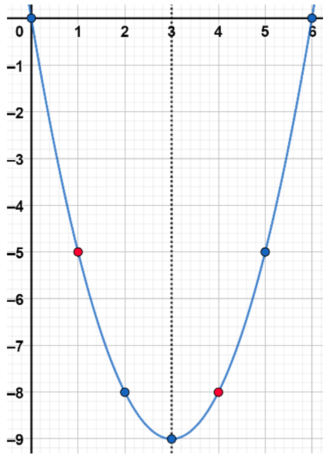
$V = (3, -9)$

iii. *Corte eixe* OX $(y = 0)$:

$$x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0{,}0) \\ x = 6 \rightarrow (6{,}0) \end{cases}$$

Corte eixe OY$(x = 0)$: $f(0) = 0 \rightarrow (0{,}0)$

iv. *Táboa de valores: Non é necesaria*



d. $y = x^2 - 9$

i. $a = 1 > 0$

ii. $\begin{cases} V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0 \\ V_y = f(0) = -9 \end{cases} \rightarrow V = (0, -9)$

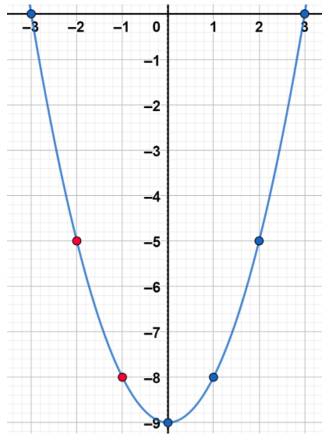
iii. *Corte eixe* OX $(y = 0)$:

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow (3{,}0) \\ x = -3 \rightarrow (-3{,}0) \end{cases}$$

Corte eixe OY$(x = 0)$: $f(0) = -9 \rightarrow (0, -9)$

iv. *Táboa de valores:*

x	y
1	−8
2	-5



11. Identifique de que tipo de función se trata e asocie cada gráfica ca súa expresión. Xustifique a súa resposta con algunha característica distintiva da función.

a. $y = 2/x$

b. $y = x + 1$

c. $y = -2x + 1$

d. $y = -2/x$

e. $y = x^2 - 4x + 1$

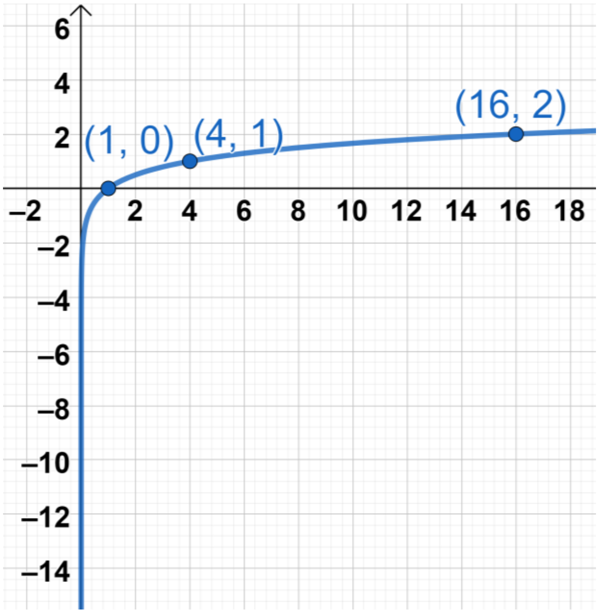
f. $y = -2x^2 + 2x + 1$

g. $y = \log_3 x$

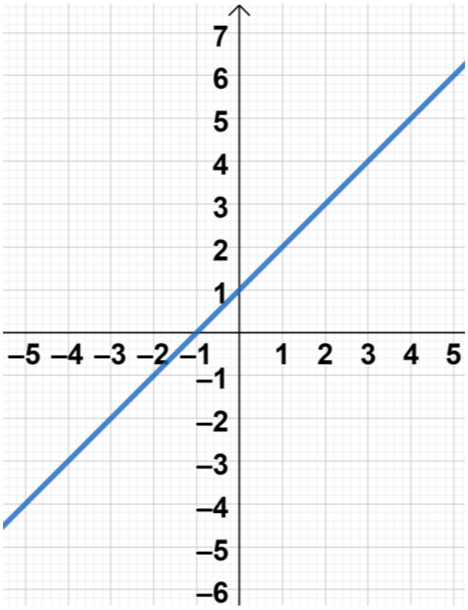
h. $y = \log_4 x$

i. $y = 3^x$

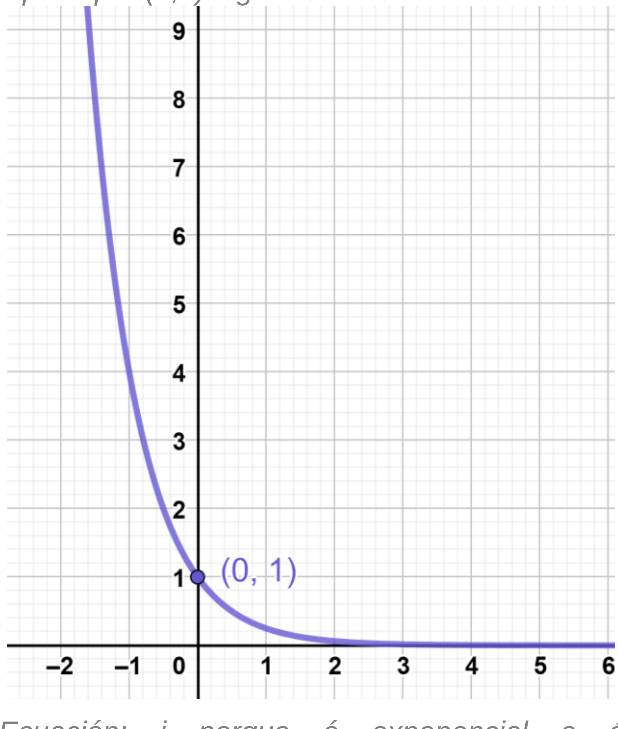
j. $y = 0{,}25^x$



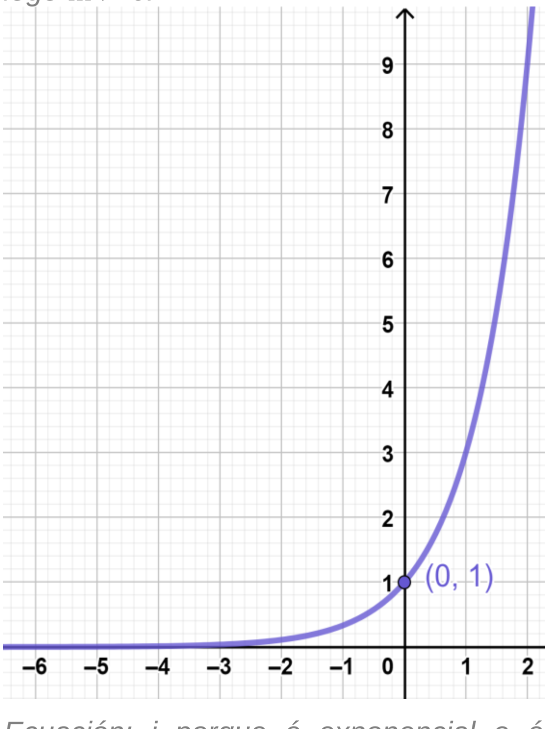
Ecuación: h porque é unha función logarítmica e pasa por (4,1) logo a base é 4.



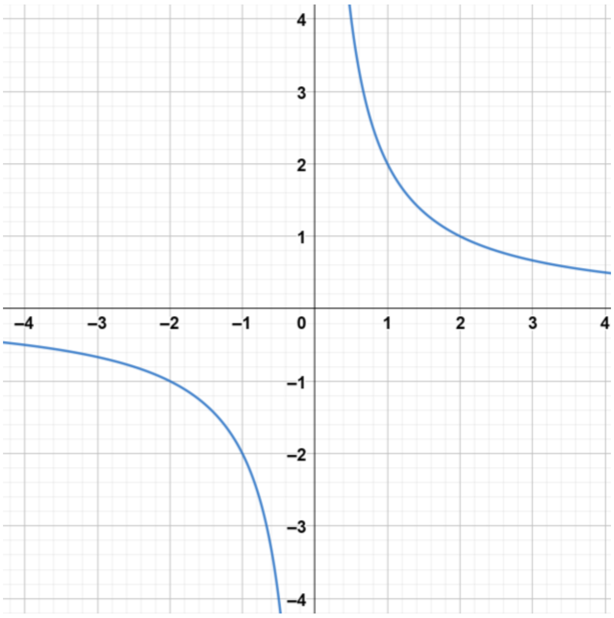
Ecuación: b porque é lineal e crecente, logo $m > 0$.



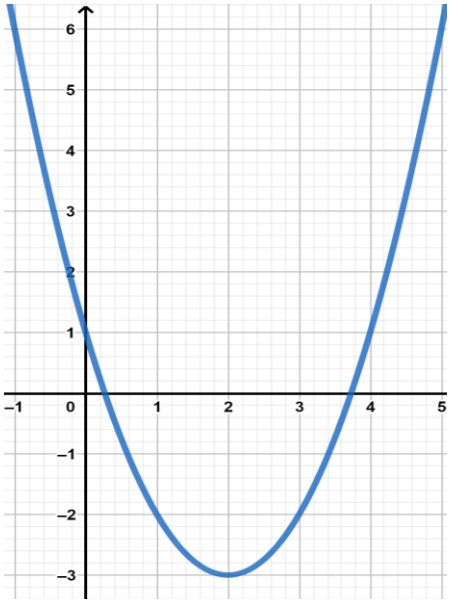
Ecuación: j porque é exponencial e é decrecente logo $0 < a < 1$



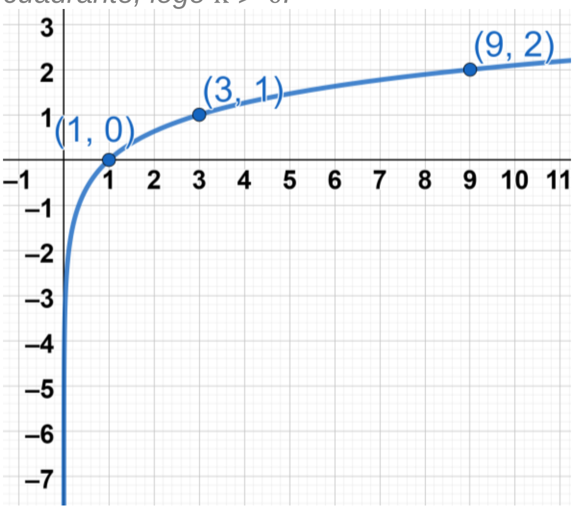
Ecuación: i porque é exponencial e é crecente logo $a > 1$.



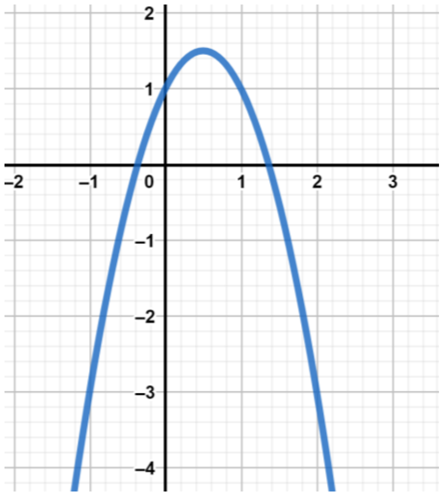
Ecuación: a porque é unha función de proporcionalidade inversa e está no 1º e 3º cuadrante, logo $k > 0$.



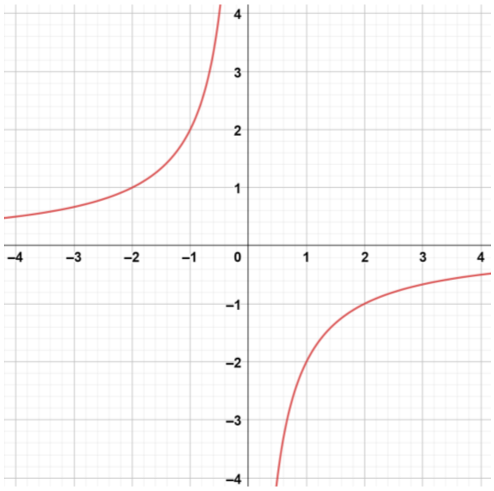
Ecuación: e porque é una función cuadrática e as ramas están cara arriba logo $a > 0$.



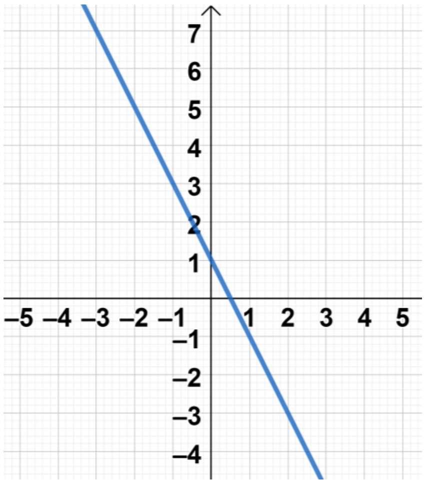
Ecuación: g porque é unha función logarítmica e pasa por (3,1) logo a base é 3.



Ecuación: f porque é unha función cuadrática e as ramas van cara abaixo, logo $a < 0$.



Ecuación: d porque é unha función inversa e está no 2º e 4º cuadrante, logo $\mathrm{k} < 0$.

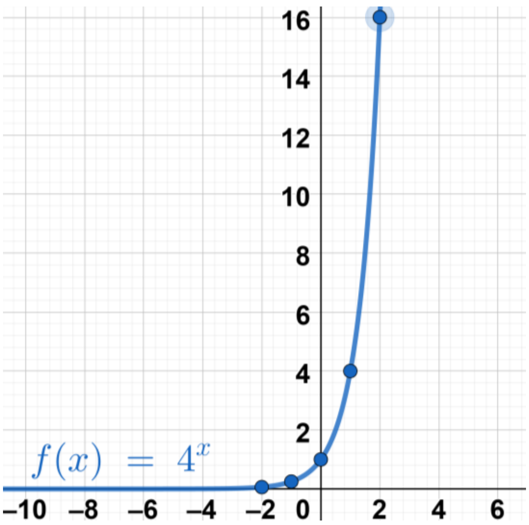


Ecuación: c porque é unha función lineal e decrecente, logo $\mathrm{m} < 0$.

12. Representa as seguintes funcións:

a. $y = 4^x$

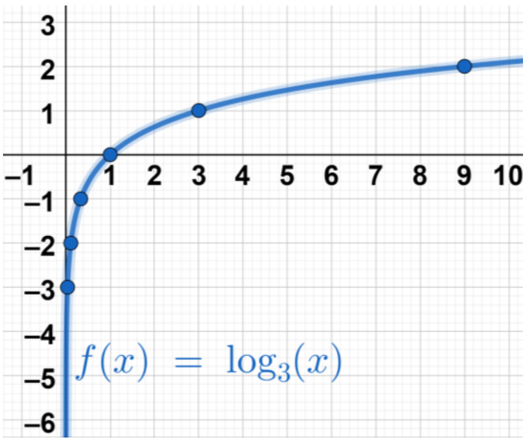
x	y
-2	$1/16$
-1	$1/4$
0	1
1	4
2	16



b. $y = \log_3 x$

$\mathrm{Dom}\ \mathrm{f} = (0, \infty)$

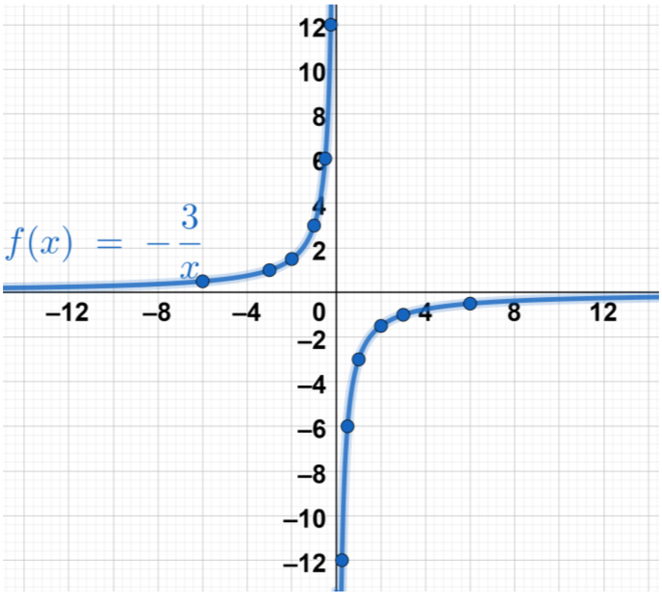
x	y
$1/27$	-3
$1/9$	-2
$1/3$	-1
1	0
3	1
9	2



c. $y = -\frac{3}{x}$

$\text{Dom f} = \mathbb{R} - \{0\}$

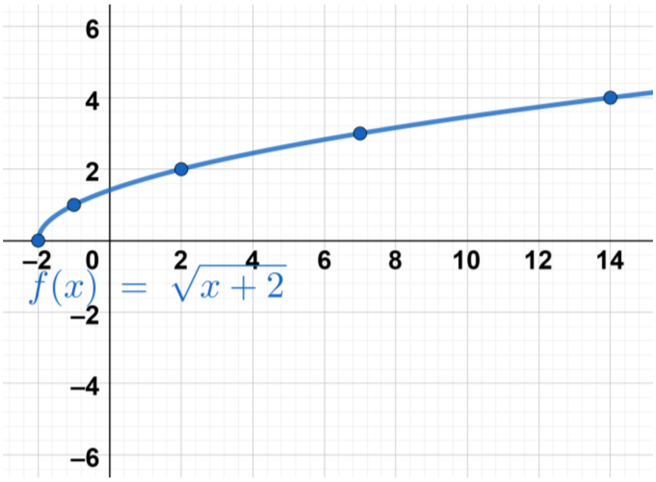
x	y
$\pm 1/4$	∓ 12
$\pm 1/2$	∓ 6
± 1	∓ 3
± 2	$\mp 3/2$
± 3	∓ 1
± 6	$\mp 1/2$



d. $y = \sqrt{x+2}$

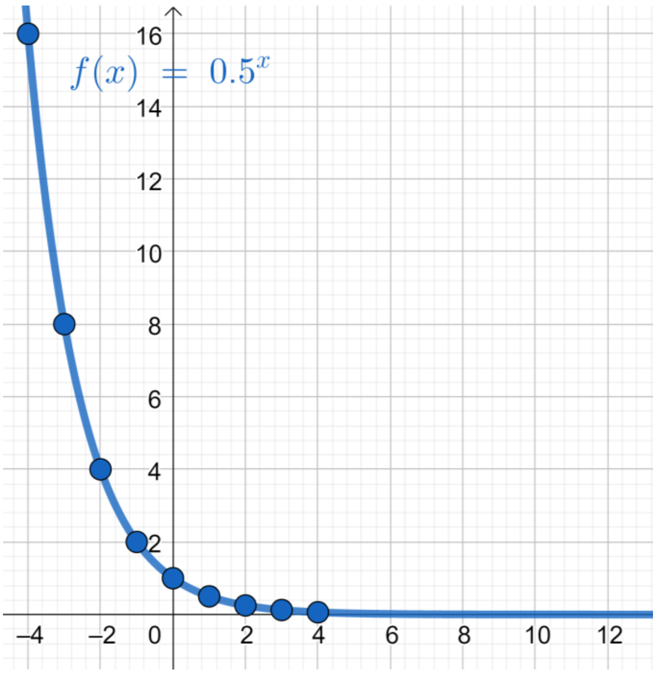
$\text{Dom f} = [-2, \infty)$

x	y
−2	0
−1	1
2	2
7	3
14	4



e. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

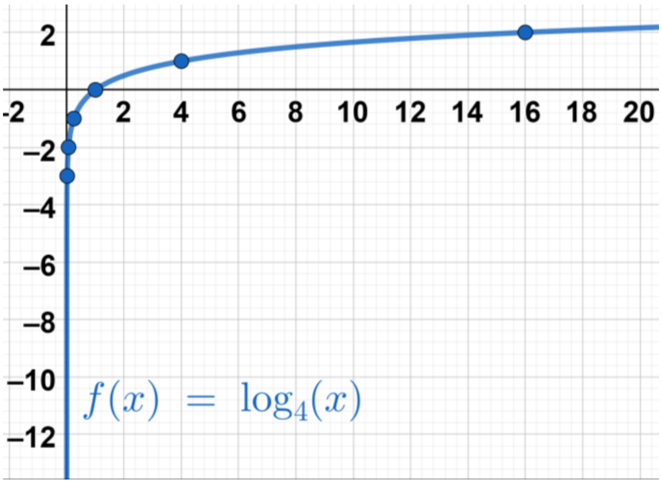
x	y
−4	16
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16



f. $y = \log_4 x$

$\text{Dom f} = (0, \infty)$

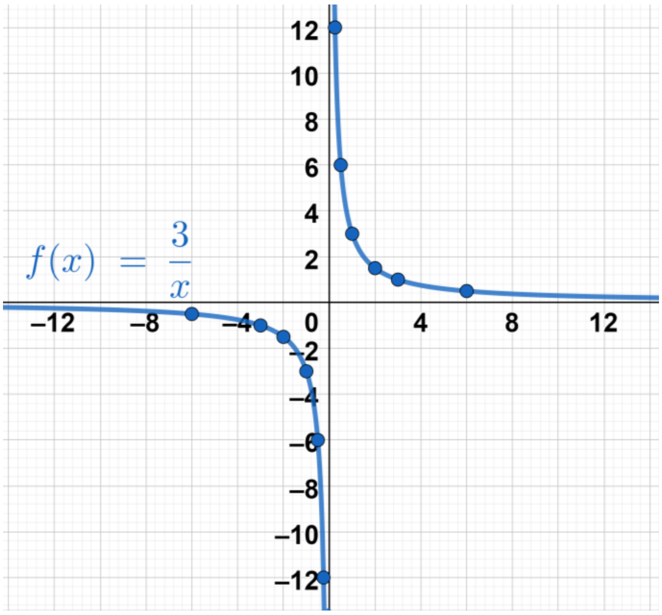
x	y
$1/16$	-2
$1/4$	-1
1	0
4	1
16	2



g. $y = \frac{3}{x}$

$\text{Dom f} = \mathbb{R} - \{0\}$

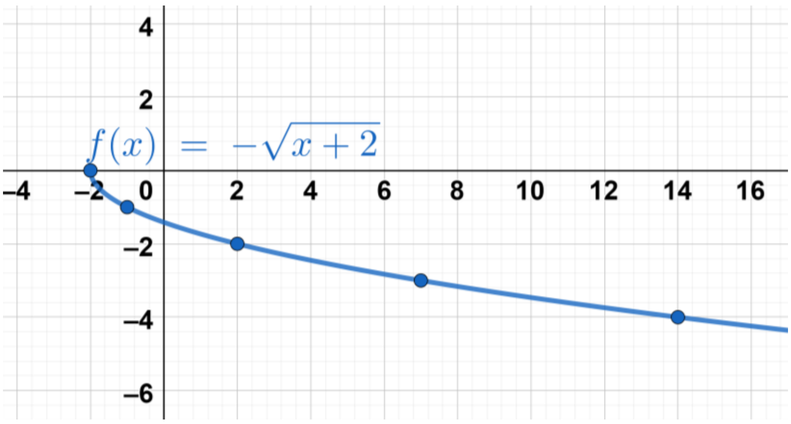
x	y
$\pm 1/4$	± 12
$\pm 1/2$	± 6
± 1	± 3
± 2	$\pm 3/2$
± 3	± 1
± 6	$\pm 1/2$



h. $y = -\sqrt{x+2}$

$\text{Dom f} = [-2, \infty)$

x	y
-2	0
-1	-1
2	-2
7	-3
14	-4



13. Representa as seguintes funcións definidas a anacos. A partir das gráficas, indica cal é o dominio e a imaxe de cada función:

a. $f(x) = \begin{cases} -x \ se\ x < 0 \ (1) \\ 1 \ se\ 0 \leq x < 1 \ (2) \\ \frac{1}{x} \ se\ x \geq 1 \ (3) \end{cases}$

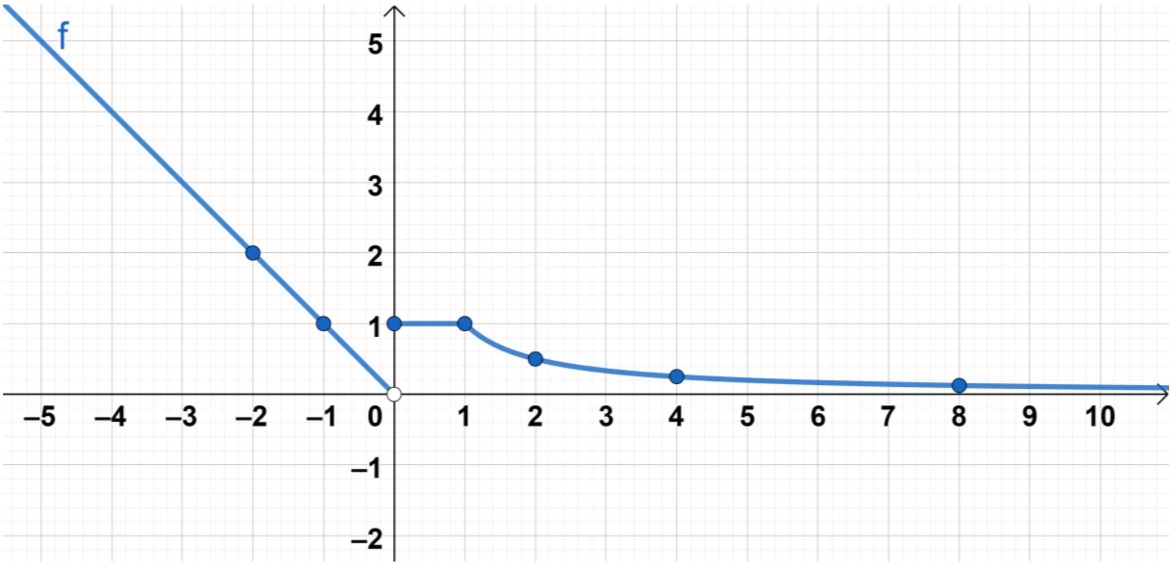
① é unha recta, polo tanto temos que facer un táboa de valores, con polo menos dous valores, tendo en conta que o dominio de dita función é $(-\infty, 0)$*. Convén incluír o valor en* $x = 0$ *(aínda que non estea no dominio) para determinar claramente onde remata ese anaco.*

x	−2	−1	0
y	2	1	0

② é unha recta horizontal, para calquera punto do dominio $[0,1)$*,* y *sempre vale 1 (polo que non é necesario facer unha táboa de valores)*

③ é unha función inversa, para representala facemos unha táboa de valores tendo en conta que o seu dominio é $[1, \infty)$

x	1	2	4	8
y	1	1/2	1/4	1/8



$$Dom\ f = \mathbb{R}$$

$$Im\ f = (0, \infty)$$

b. $g(x) = \begin{cases} -x^2\ se\ x < 0 ① \\ 2\ se\ 1 < x \leq 2 ② \\ -x + 4\ se\ x > 2 ③ \end{cases}$

① é unha parábola definida en $(-\infty, 0)$*. Calcularemos o valor en* $x = 0$ *para determinar claramente onde termina o anaco.*

1) $a < 0 \rightarrow$ *as ramas da parábola están cara abaixo.*
2) $\begin{cases} V_x = -\frac{b}{2a} = 0 \\ V_y = -0^2 = 0 \end{cases} \rightarrow V(0,0)$ *non está no dominio.*
3) *Corte cos eixes:*
   a. $OX(y = 0): -x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$
   b. $OY(x = 0): y = -0^2 = 0 \rightarrow (0,0)$

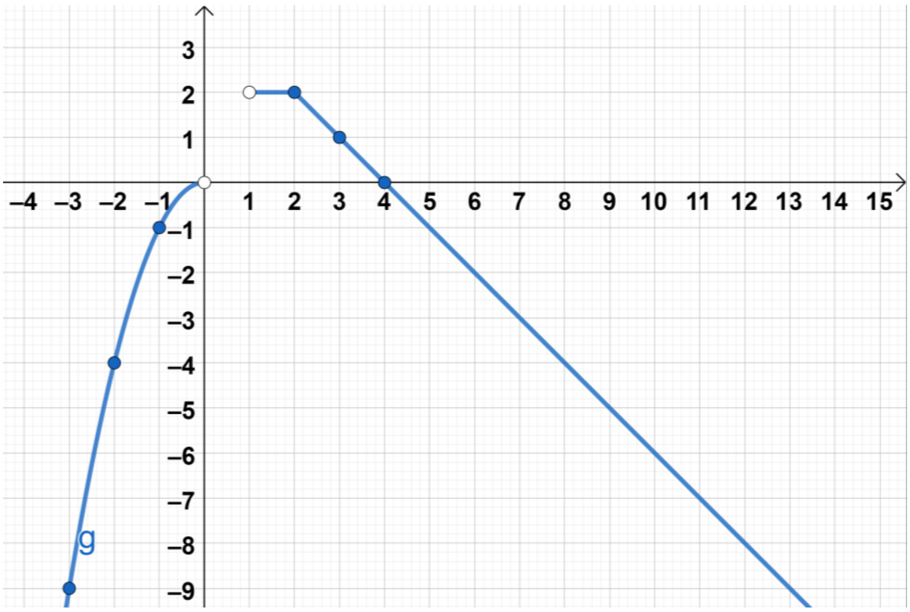
4) Táboa de valores:

x	-1	-2	-3
y	-1	-4	-9

② é unha recta horizontal, para calquera punto do dominio $(1,2]$, y sempre vale 2 (polo que non é necesario facer unha táboa de valores)

③ é unha recta, polo tanto temos que facer un táboa de valores, con polo menos dous valores, tendo en conta que o dominio de dita función é $(2,\infty)$. Convén incluír $x = 2$ (aínda que non estea no dominio) para determinar claramente onde comeza ese anaco.

x	2	3	4
y	2	1	0



$$Dom\ f = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$$

$$Im\ f = (-\infty,2]$$

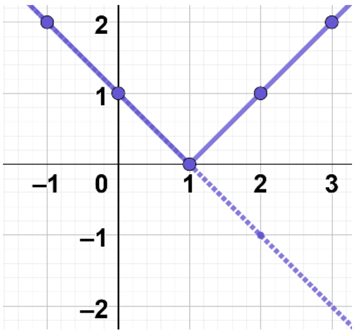
14. Escribe as seguintes funcións como funcións definidas a anacos e representa:

a. $y = |1 - x|$

Buscamos os valores para os que a función é positiva. Neses valores a función queda como está e no resto do dominio cámbiase de signo. Para elo resolvemos a inecuación $1 - x \geq 0$.

$$1 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -1 \rightarrow x \leq 1$$

$$y = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x\ se\ x \leq 1 \text{ ①} \\ x - 1\ se\ x > 1 \text{ ②} \end{cases}$$



Para representala podemos trazar a recta $y = 1 - x$ e reflexar os valores con y negativa ou representar a función definida a anacos.

1

x	y
0	1
1	0

2

x	y
1	0
2	1

b. $y = |x^2 - 4|$

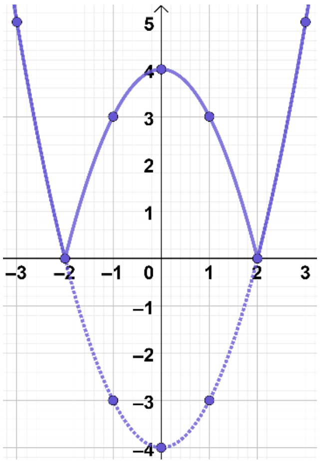
Buscamos os valores para os que a función é positiva. Neses valores a función queda como está e no resto do dominio cámbiase de signo. Para elo resolvemos a inecuación $x^2 - 4 \geq 0$.

Como se trata dunha inecuación de grao 2, primeiro resolvemos a ecuación $x^2 - 4 = 0$ *e despois estudamos o signo do polinomio* $P(x) = x^2 - 4$ *nos respectivos intervalos.*

$$x^2 - 4 = 0 \to x^2 = 4 \to x = \pm\sqrt{4} \to x = \pm 2$$

Intervalos	$(-\infty, -2)$	$x = -2$	$(-2, 2)$	$x = 2$	$(2, \infty)$
Signo de $P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ se } x \leq -2 \\ 4 - x^2 \text{se} -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$



Imos representar a función $y = x^2 - 4$. *Aqueles puntos cuxa* y *sexa negativa substitúense polo seu simétrico respecto ao eixe* OX*, é dicir, o mesmo punto pero ca* y *positiva.*

1) $a > 0 \to$ *as ramas da parábola están cara arriba.*

2) $\begin{cases} V_x = -\frac{b}{2a} = 0 \\ V_y = 0^2 - 4 = -4 \end{cases} \to V(0, -4)$*(co valor absoluto pasa a ser* $(0,4)$*)*

3) *Corte cos eixes:*

- $OX(y = 0): x^2 - 4 = 0 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2 \to \begin{cases} (2,0) \\ (-2,0) \end{cases}$
- $OY(x = 0): y = 0^2 - 4 = -4 \to (0, -4)$ *)(co valor absoluto pasa a ser* $(0,4)$*)*

4) *Táboa de valores:*

x	1	3
y	-3	5
$\lvert x\rvert$	3	5

15. Un estudo de mercado para o lanzamento de teléfonos móbiles obtivo que a función demanda do devandito produto en función do prezo (en €), x, é $f_d(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 11250$ e a función oferta $f_o(x) = \frac{7}{18}x^2$. A que prezo deben venderse os teléfonos móbiles para que a demanda iguale á oferta?

$f_d(x) = f_o(x) \to -\frac{1}{9}x^2 + 11250 = \frac{7}{18}x^2 \to 11250 = \frac{7}{18}x^2 + \frac{2}{18}x^2 \to 11250 = \frac{9}{18}x^2 \to 11250 = \frac{x^2}{2} \to$
$x^2 = 22500 \to x = 150$€ *(Rexéitase a solución negativa porque non ten sentido no problema).*

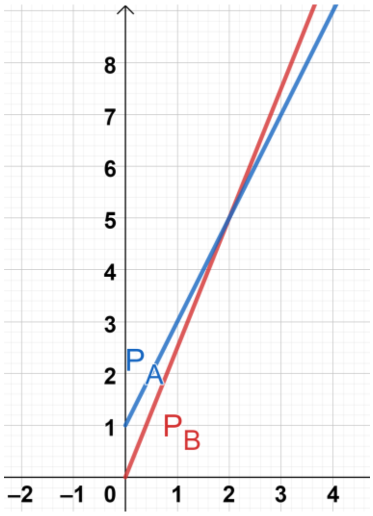
16. Nunha tenda A venden a 2€/kg de laranxas e cobran 1€ pola malla. Noutra tenda B véndenas a 2,5€/kg pero non cobran a malla.

a. Escribe as ecuacións que relacionan o prezo P en función dos kg comprados, x.

$P_A(x) = 2x + 1, x > 0$

$P_B(x) = 2{,}5x, x > 0$

b. Representa ambas funcións nos mesmos eixes e analiza a partir de cantos kg compensa comprar na tenda A.



Cando compramos máis de 2 kg o prezo da tenda A é inferior que o da B, polo tanto a partir dos 2 kg compénsanos comprar na tenda A.

17. A altura, h, á que se atopa en cada instante, t, unha pedra que lanzamos verticalmente cara arriba vén dada pola función $h(t) = 20t - 5t^2, t \geq 0$.

a. En que instante alcanza a altura máxima?

Dado que é unha parábola cuxo coeficiente $a < 0$, sabemos que as súas ramas van cara abaixo e que o seu vértice é o seu punto máximo.

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot (-5)} = 2$$

Polo tanto alcanza a altura máxima aos 2 segundos.

b. Cal é a altura máxima alcanzada pola pedra?

Sabemos que a altura máxima se alcanza no instante $t = 2$ (apartado a.), polo tanto a altura máxima é:

$$h(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20$$

A altura máxima é 20.

c. En que momento toca o chan?

A pedra toca o chan cando a súa altura é 0:

$$h(t) = 0 \rightarrow 20t - 5t^2 = 0 \rightarrow 5t(4 - t) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 4 - t = 0 \rightarrow t = 4 \end{cases}$$

A pedra toca o chan tras 4 segundos.

18. Nun laboratorio estanse cultivando un tipo de bacterias. O crecemento do cultivo vén dado pola función $f(t) = 7500 \cdot 2^{\frac{t}{18}}$, onde t é o tempo en minutos. Calcula o tamaño da poboación ao cabo de 36 minutos, 3 horas e 1 día.

$$f(36) = 7500 \cdot 2^{\frac{36}{18}} = 7500 \cdot 2^2 = 30000$$

Como t está en minutos, temos que pasar de horas a minutos.

$$3\ h \cdot \frac{60\ min}{1\ h} = 180\ min$$

$$f(180) = 7500 \cdot 2^{\frac{180}{18}} = 7680000$$

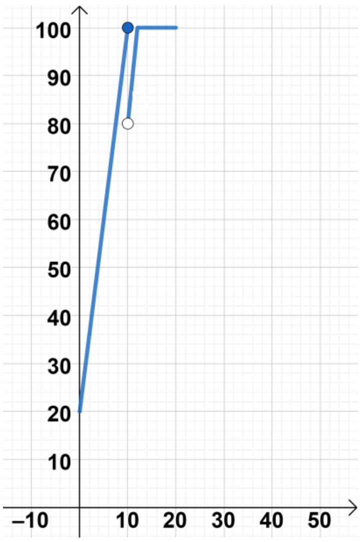
Como t está en minutos, temos que pasar de días a minutos.

$$1\ día \cdot \frac{24\ h}{1\ día} \cdot \frac{60\ min}{1\ h} = 1440\ min$$

$$f(1440) = 7500 \cdot 2^{\frac{1440}{18}} = 7500 \cdot 2^{80} = 9{,}067 \cdot 10^{27}$$

Aos 36 minutos haberá 30000 bacterias, ás 2 horas 7,68 millóns e despois de 1 días $9{,}067 \cdot 10^{27}$.

19. Poñemos ao lume un cazo con auga que está, inicialmente, a 20℃. Tras 10 minutos comeza a ferver. Nese momento botamos pasta e a temperatura descende a 80℃. Ao cabo de 2 minutos volve a ferver e mantense así durante 8 minutos. Describe esta situación gráfica e analiticamente.



No 1º tramo pasa polos puntos $(0,20)$ e $(10,100)$:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{100-20}{10-0} = 8;\ \text{como pasa por } (0,20) \to n = 20 \to y = 8x + 20$$

No 2º tramo pasa por $(10,80)$ e $(12,100)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 80}{12 - 10} = 10$$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \to y = 80 + 10(x - 10) \to y = 10x - 20$$

No 3º é a función constante $y = 100$.

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 8t\ se\ 0 \le t \le 10 \\ 10t - 20\ se\ 10 < t \le 12 \\ 100\ se\ 12 < t \le 20 \end{cases}$$