FUNCIÓNS

Exercicios autoavaliables

1. Acha o dominio das seguintes funcións:

   a. $f(x) = \frac{x+7}{x^2-5x+6}$
   b. $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-7}$
   c. $h(x) = \ln(x+7)$

2. Calcula $f+g, f-g, f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ para as funcións $f(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g(x) = \frac{x}{2}$

3. Calcula $f \circ g$ e $g \circ f$ para as funcións $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$

4. Calcula a inversa da función $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$

5. Estuda as simetrías das seguintes funcións:

   a. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$　　b. $g(x) = -2x^3 + 4x$　　c. $h(x) = x^2 - 7$

6. Representa as seguintes parábolas:

   a. $y = x^2 - x - 2$　　b. $y = -x^2 - x - 2$.

7. Un canón lanza un disparo cuxa traxectoria vén dada por $y = -3x^2 + 18x$, con x e y en centos de metros. Calcula a altura máxima e o alcance do disparo.

8. Debuxa a seguinte función definida a anacos e, a partir da súa gráfica, indica cal é o seu dominio e a súa imaxe:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 \; se \; x < -2 \\ 1 \; se -2 \leq x \leq 2 \\ \log_3(x+1) \; se \; x \geq 2 \end{cases}$$

Solucións

1. Acha o dominio das seguintes funcións:

a. $f(x) = \frac{x+7}{x^2-5x+6}$

Como a función ten un denominador, descartaremos aqueles valores nos que o denominador valga 0. Para atopar ditos valores imos resolver a ecuación $\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 6 = 0$.

$$\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 6 = 0 \to \mathrm{x} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Entón, $Dom\ f = \mathbb{R} - \{2,3\}$

b. $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-7}$

Como a función ten unha raíz, quedarémonos con aqueles valores nos que o radicando sexa non negativo. Para atopar ditos valores temos que resolver a inecuación $\mathrm{x} + 3 \geq 0$.

$$\mathrm{x} + 3 \geq 0 \to \mathrm{x} \geq -3$$

Por outra banda, ten un denominador, polo que descartaremos aqueles valores que anulen o denominador. Para atopalos resolveremos a ecuación $\mathrm{x} - 7 = 0$.

$$\mathrm{x} - 7 = 0 \to \mathrm{x} = 7$$

Entón, $Dom\ g = [-3, \infty) - \{7\}$.

c. $h(x) = \ln(x+7)$

Como a función ten un logaritmo, quedarémonos con aqueles valores nos que o radicando sexa positivo. Para atopar ditos valores temos que resolver a inecuación $\mathrm{x} + 7 > 0$

$$\mathrm{x} + 7 > 0 \to \mathrm{x} > -7$$

Entón, $Dom\ \mathrm{h} = (-7, \infty)$.

2. Calcula $f+g,\ f-g,\ f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ para as funcións $f(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g(x) = \frac{x}{2}$.

a. $(f\ +\ g)(x) =\ f(x) +\ g(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{2} = \frac{2+x\cdot(x+1)}{2\cdot(x+1)} = \frac{2+x^2+x}{2x+2} = \frac{x^2+x+2}{2x+2}$

b. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{2} = \frac{2-x\cdot(x+1)}{2\cdot(x+1)} = \frac{2-x^2-x}{2x+2}$

c. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2(x+1)} = \frac{x}{2x+2}$

d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x+1} : \frac{x}{2} = \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x^2+x}$

3. Calcula $f \circ g$ e $g \circ f$ para as funcións $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$.

a. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{2-x}\big) = \big(\sqrt{2-x}\big)^2 + 3 = 2 - x + 3 = 5 - x$

b. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2+3) = \sqrt{2-(x^2+3)} = \sqrt{2-x^2-3} = \sqrt{-x^2-1}$

4. Calcula a inversa da función $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$.

Escríbese a función da forma $y=\frac{2x+1}{x-5}$, intercámbiase x por y e despéxase y:

$$x=\frac{2y+1}{y-5}\xrightarrow{\cdot(y-5)}x(y-5)=2y+1\rightarrow xy-5x=2y+1\rightarrow xy-2y=5x+1\xrightarrow[común\ y]{sacamos\ factor}$$

$$y(x-2)=5x+1\xrightarrow{\div(x-2)}y=\frac{5x+1}{x-2}$$

A función inversa é $f^{-1}(x)=\frac{5x+1}{x-2}$.

5. Estuda as simetrías e os puntos de corte cos eixes das seguintes funcións:

a. $f(x)=x^4-3x^2-4$

Simetrías:

$f(-x)=(-x)^4-3(-x)^2-4=x^4-3x^2-4=f(x)\rightarrow f$ *é par*

Puntos de corte cos eixes:

- $OX(y=0): x^4-3x^2-4=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-3t-4=0\rightarrow t=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot(-4)}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=$
$$=\begin{cases}\dfrac{3+5}{2}=4\rightarrow(4,0)\\ \dfrac{3-5}{2}=-1\rightarrow(-1,0)\end{cases}$$
- $OY(x=0): f(0)=0^4-3\cdot0^2-4=-4\rightarrow(0,-4)$

b. $g(x)=-2x^3+4x$

Simetrías:

$g(-x)=-2(-x)^3+4(-x)=-2(-x^3)-4x=2x^3-4x\neq g(x)\rightarrow g$ *non é par*

$-g(-x)=-2x^3+4x=g(x)\rightarrow g$ *é impar*

Puntos de corte cos eixes:

- $OX(y=0): -2x^3+4x=0\xrightarrow[factor\ común]{sacamos}x(-2x^2+4)=0\rightarrow$
$$\begin{cases}x=0\rightarrow(0,0)\\ -2x^2+4=0\rightarrow x^2=\dfrac{-4}{-2}\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\rightarrow\left(-\sqrt{2},0\right),\left(\sqrt{2},0\right)\end{cases}$$
- $OY(x=0): g(0)=-2\cdot0^3+4\cdot0=0\rightarrow(0,0)$

c. $h(x)=x^2-7$

Simetrías:

$h(-x)=(-x)^2-7=x^2-7\neq h(x)\rightarrow h$ *non é par*

$-h(-x)=-x^2+7\neq h(x)\rightarrow h$ *non é impar*

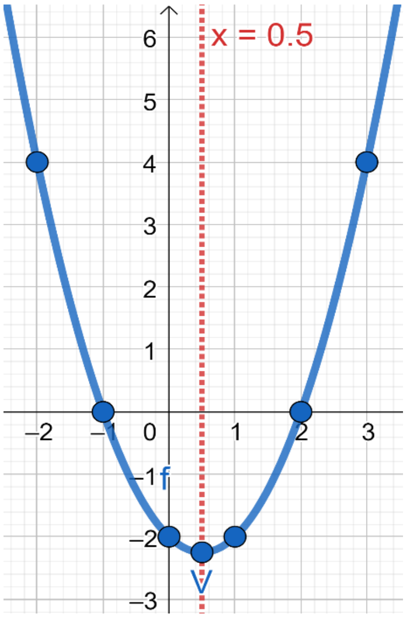
A función non é simétrica nin antisimétrica.

Puntos de corte cos eixes:

- $OX(y=0): x^2-7=0 \to x^2=7 \to x=\pm\sqrt{7} \to \begin{cases}(-\sqrt{7},0)\\ (\sqrt{7},0)\end{cases}$
- $OY(x=0): h(0)=0^2-7=-7 \to (0,-7)$

6. Representa as seguintes parábolas:

a. $y = x^2 - x - 2$



i. $a = 1 > 0$, *as ramas da parábola están cara arriba.*

ii. $\begin{cases} V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \\ V_y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-2-8}{4} = -\frac{9}{4} \end{cases} \to V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

iii. *Corte cos eixes:*

$OX(y=0): x^2-x-2=0 \to$

$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-2)}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} =$

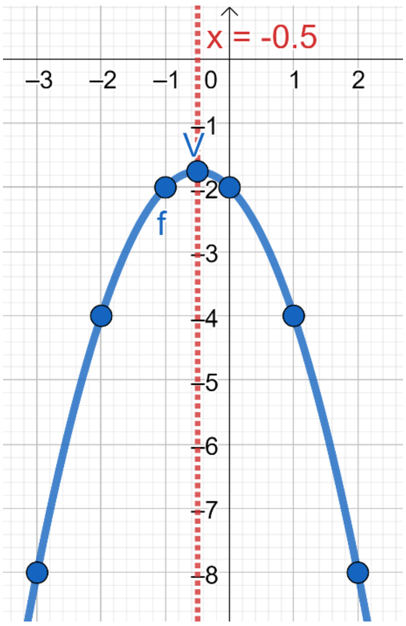
$= \begin{cases} 2 \to (2,0) \\ -1 \to (-1,0) \end{cases}$

$OY(x=0): f(0)=0^2-0-2=-2 \to (0,-2)$

iv. *Táboa de valores:*

x	y
3	4

b. $y = -x^2 - x - 2.$



i. $a = -1 < 0$, *as ramas da parábola están cara abaixo.*

ii. $\begin{cases} V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{2} \\ V_y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{-1+2-8}{4} = -\frac{7}{4} \end{cases} \to$

$V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

iii. *Corte cos eixes:*

$OX(y=0): -x^2-x-2=0 \to$

$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-2)(-1)}}{2\cdot(-1)} = \frac{1\pm\sqrt{-7}}{-2}$ *non ten solución*

$OY(x=0): f(0) = -0^2-0-2=-2 \to (0,-2)$

iv. *Táboa de valores:*

x	y
1	−4
2	−8

7. Un canón lanza un disparo cuxa traxectoria vén dada por $y = -3x^2 + 18x$, con x e y en centos de metros. Calcula a altura máxima e o alcance do disparo.

A traxectoria vén dada por unha parábola, polo tanto, a altura máxima é V_y.

$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{2\cdot(-3)} = 3 \to V_y = f(3) = -3\cdot 3^2 + 18\cdot 3 = 27$

O alcance do disparo é o punto no que a función volve cortar ao eixe OX*:*

$y = 0 \rightarrow -3x^2 + 18x = 0 \rightarrow -3x(x-6) = 0 \rightarrow x = 0 \; e \; x = 6.$

Loxicamente 0 *correspóndese co punto no que se atopa o canón, polo que o alcance será* $\mathrm{x} = 6.$

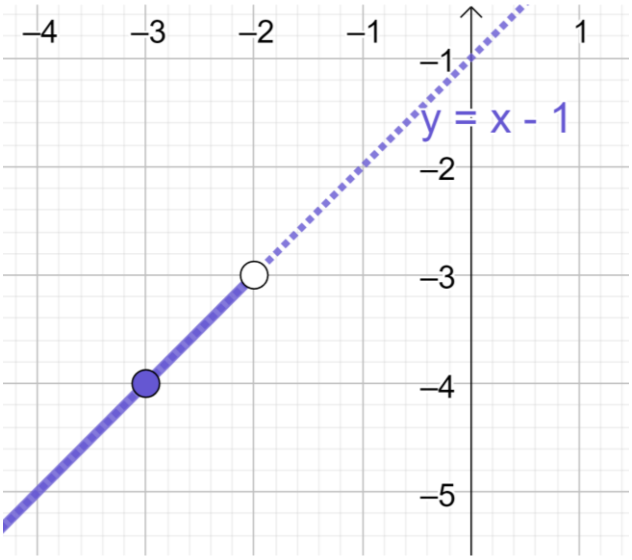
Así, tendo en conta a escala de x *e de* y*, a altura máxima que alcanza é de 2700 m e o alcance é de 600 m.*

8. Debuxa a seguinte función definida a anacos e, a partir da súa gráfica, indica cal é o seu dominio e a súa imaxe:

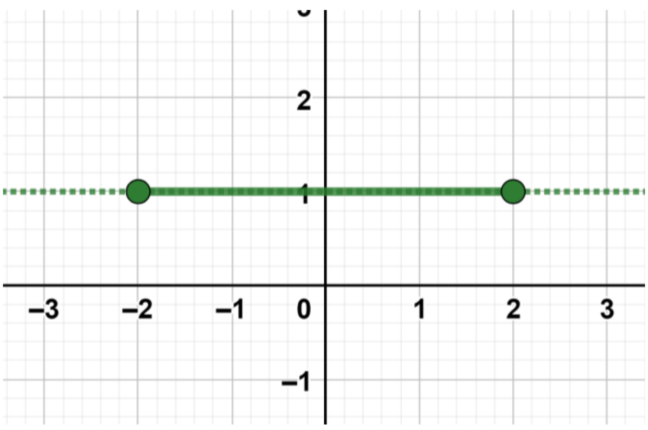
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \; se \; x < -2 \; ① \\ 1 \; se \; -2 \leq x \leq 2 \; ② \\ \log_3(x+1) \; se \; x \geq 2 \; ③ \end{cases}$$

① *é unha recta. Para representala facemos unha táboa de valores (tendo en conta o dominio):*

x	y
−3	−4
−2	−3

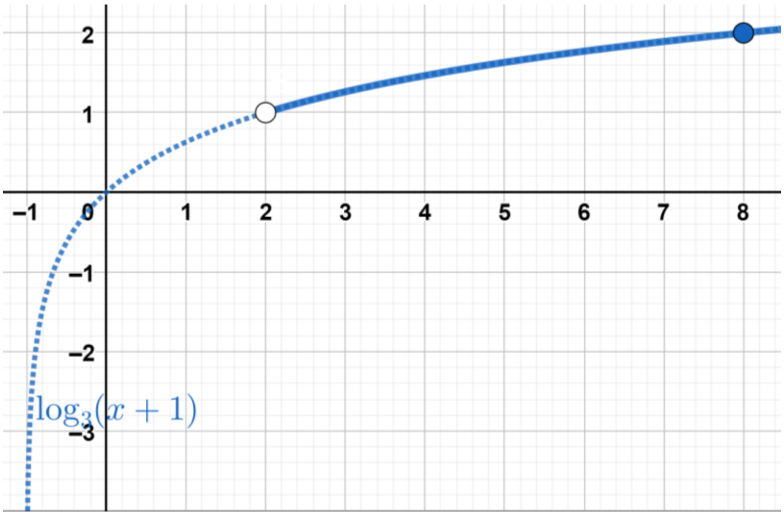


② *é unha recta horizontal. Para calquera valor de* x*,* y *vale 1.*



③ é unha función logarítmica. Facemos unha táboa de valores, usando aqueles que estean no dominio definido en f e que dean valores enteiros.

x	y
2	1
8	2



Unimos todos os anacos: