# LÍMITES E CONTINUIDADE

## Exercicios autoavaliables

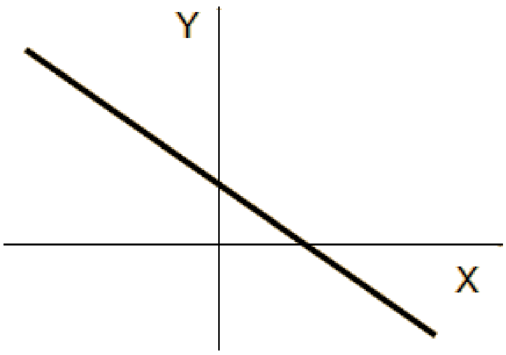
1. Debuxa a gráfica da función $f(x) = \begin{cases} x^2 se\ x < 0 \\ x\ se\ 0 < x \leq 1 \\ 3\ se\ x > 1 \end{cases}$ e calcula os límites da función en $x = 0$ e en $x = 1$.

2. Debuxa a gráfica dunha función que teña os seguintes límites no infinito:

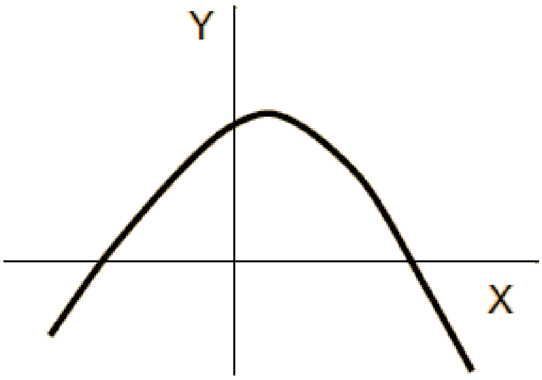
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

3. Calcula os límites no infinito das funcións das gráficas seguintes:

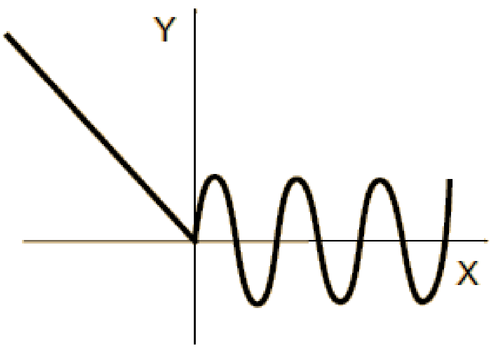
a.



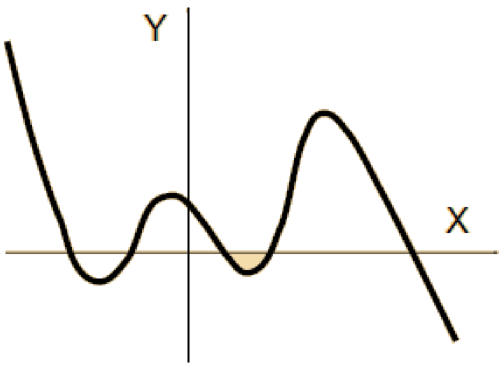

b.




c.




d.




4. Calcula os seguintes límites:

a. $\lim_{x\to 2}(7x^2 - 2x + 2)$ b. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+2}$ c. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2-2x+5}\right)$

5. Calcula os seguintes límites. Se non existe algún, calcula os seus límites laterais:

a. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-4x-5}\right)$ c. $\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2+x-8}{x^2+x-6}\right)$ e. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}\right)$

b. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}\right)$ d. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right)$ f. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3-3x-2}{x^3+5x^2+7x+3}\right)$

6. Calcula os seguintes límites nos que aparecen expresións irracionais:

a. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}+2}{x+3}$ b. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ c. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$

7. Calcula os seguintes límites de funcións no infinito:

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+4x+5}$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{3x^4+4x+5}$

c. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+2x+5}{x-1} - 2x\right)$

d. $\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - \frac{x^4-1}{x^2+3}\right)$

8. Debuxa a gráfica da función $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ se\ x < 0 \\ 1\ se\ 0 \le x < 1 \\ x\ se\ 1 < x < 2 \\ -x+1\ se\ x \ge 2 \end{cases}$ e estuda as súas descontinuidades nos puntos $0, 1$ e $2$, xustificando a túa resposta mediante os límites laterais.

9. Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} x\ se\ x < 1 \\ \frac{1}{x}\ se\ x \ge 1 \end{cases}$.

10. Indica os puntos nos que as funcións seguintes son continuas e xustifica a túa resposta:

a. $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ b. $g(x) = \sin x^2$ c. $h(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x+5)}$

11. Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} x^3+1\ se\ x < 0 \\ 1-x\ se\ 0 \le x < 1 \\ x^2\ se\ x \ge 1 \end{cases}$

12. Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} x^3+1\ se\ x < 0 \\ 0\ se\ x = 0 \\ 1-x^2\ se\ x > 0 \end{cases}$

13. Calcula as asíntotas das seguintes funcións e fai un bosquexo da función:

a. $f_1(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

b. $f_2(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

c. $f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$

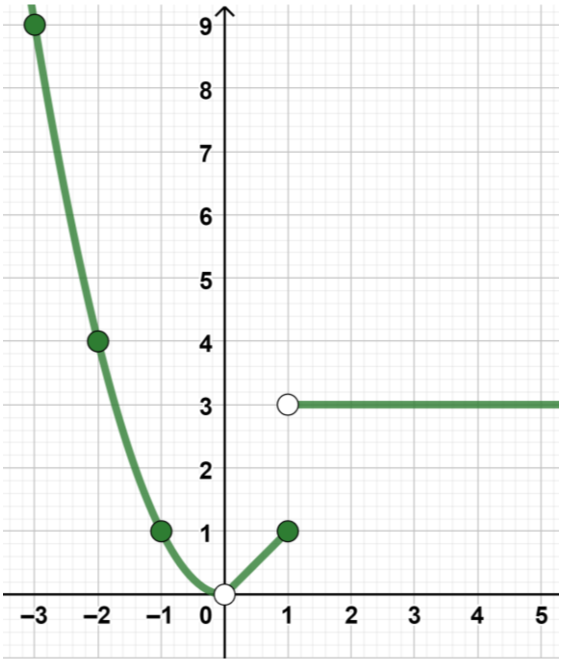
d. $f_4(x) = \frac{x^2}{x+1}$

e. $f_5(x) = \frac{x^3-2}{x^2-4}$

f. $f_6(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

## Solucións

1. Debuxa a gráfica da función $f(x) = \begin{cases} x^2 se\ x < 0 \text{ ①} \\ x\ se\ 0 < x \leq 1 \text{ ②} \\ 3\ se\ x > 1 \text{ ③} \end{cases}$ e calcula os límites da función en $x = 0$ e en $x = 1$.




*Representación:*

*① É unha parábola cuxo vértice é o punto $(0,0)$. Dito punto é o único no que a función corta aos eixes. Facemos unha táboa de valores tendo en conta o dominio:*

| x | −1 | −2 | −3 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | 4 | 9 |

*② É unha recta, facemos unha táboa de valores tendo en conta o dominio e incluímos o 0 para saber onde comeza e o 1 para saber onde remata:*

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| y | 0 | 1 |

*Observemos que o $(0,0)$ non está incluído nin en ① nin en ②, polo que se representa como un círculo oco.*

*③ É unha recta horizontal que sempre vale 3.*

*Límite en $x = 0$:*

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.
- *Límite pola dereita:* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

*Como os límites laterais existen e son iguais,* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

*Límite en $x = 1$:*

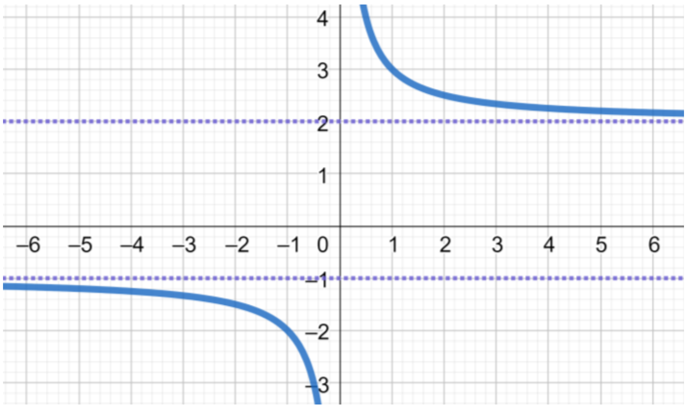
- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$.
- *Límite pola dereita:* $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$.

*Neste caso, aínda que os límites laterais existen, non son iguais, entón o límite* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *non existe.*

*É importante ter en conta que á hora de calcular límites, non importa que a función estea ou non definida no punto. Búscase o número ao que a gráfica se aproxima, chegue ou non chegue.*

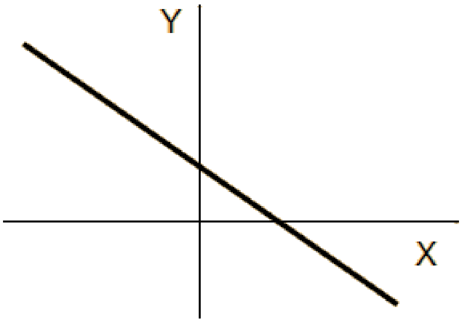
2. Debuxa a gráfica dunha función que teña os seguintes límites no infinito:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$



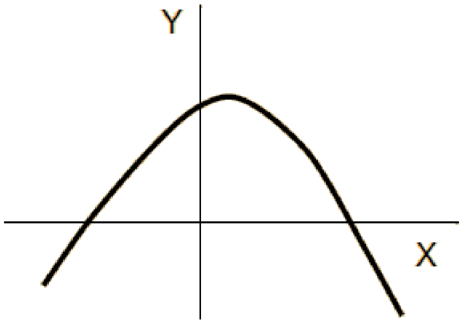
3. Calcula os límites no infinito das funcións das gráficas seguintes:

a.



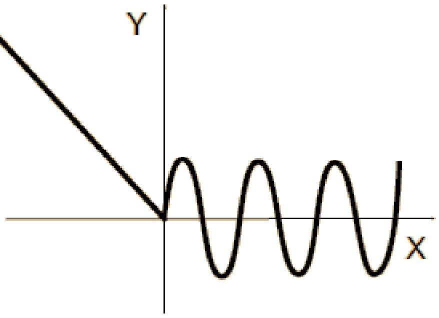
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *y* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b.



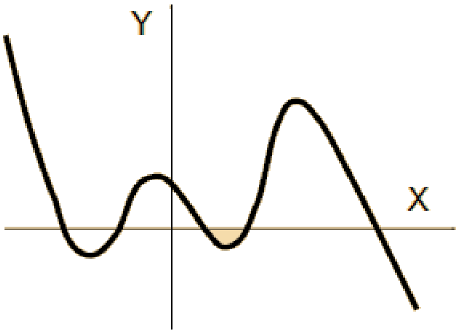
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *y* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

c.



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *no existe*

d.



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *y* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

4. Calcula os seguintes límites:

a. $\lim_{x\to2}(7x^2 - 2x + 2)$  b. $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+2}$  c. $\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2-2x+5}\right)$

*a.* $\lim_{x\to2}(7x^2 - 2x + 2) = 7\cdot2^2 - 2\cdot2 + 2 = 26$

*b.* $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+2} = \frac{2\cdot1^2-3\cdot1+1}{1^2+2} = \frac{0}{3} = 0$

*c.* $\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2-2x+5}\right) = \frac{2^2+3\cdot2+4}{2^2-2\cdot2+5} = \frac{14}{5}$

5. Calcula os seguintes límites. Se non existe algún, calcula os seus límites laterais:

a. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-4x-5}\right)$

c. $\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2+x-8}{x^2+x-6}\right)$

e. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}\right)$

b. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}\right)$

d. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right)$

f. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3-3x-2}{x^3+5x^2+7x+3}\right)$

*Denotaremos por $(Ind)$ as indeterminacións.*

*a.* $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-4x-5}\right)=\frac{(-1)^2-1+1}{(-1)^2-4\cdot(-1)-5}=\frac{1}{0}=\pm\infty$

*Facemos os límites laterais:*

*Límite pola esquerda: Substituímos* $x=-1{,}1$ *no denominador*→ $\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-4x-5}\right)=\frac{1}{0^+}=\infty$

*Límite pola dereita: Substituímos* $x=-0{,}9$ *no denominador*→ $\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-4x-5}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

*b.* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}\right)=\frac{2^2-2-2}{2^2+2-6}=\frac{0}{0}(\text{Ind})=(1)\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+3}=\frac{2+1}{2+3}=\frac{3}{5}$

*(1) Factorizamos os polinomios (tendo en conta que 2 é raíz e por iso os anula):*

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

*c.* $\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2+x-8}{x^2+x-6}\right)=\frac{(-3)^2-3-8}{(-3)^2-3-6}=\frac{-2}{0}=\pm\infty$

*Facemos os límites laterais:*

*Límite pola esquerda: Substituímos* $x=-3{,}1$ *no denominador*→ $\lim_{x\to -3^-}\left(\frac{x^2+x-8}{x^2+x-6}\right)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

*Límite pola dereita: Substituímos* $x=-2{,}9$ *no denominador*→ $\lim_{x\to -3^+}\left(\frac{x^2+x-8}{x^2+x-6}\right)=\frac{-2}{0^-}=+\infty$

*d.* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right)=\frac{1^2-3\cdot 1+2}{1^2-4\cdot 1+3}=\frac{0}{0}(\text{Ind})=(1)\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-3}=\frac{1-2}{1-3}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

*(1) Factorizamos os polinomios (tendo en conta que 1 é raíz e por iso os anula):*

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

*e.* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}\right)=\frac{2^2-3\cdot 2+2}{2^2-4\cdot 2+4}=\frac{0}{0}(Ind)=(1)\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-2}=\frac{2-1}{2-2}=\frac{1}{0}=\pm\infty\ (2)$

*(1) Factorizamos os polinomios (tendo en conta que 2 é raíz e por iso os anula):*

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

*(2) Facemos os límites laterais:*

*Límite pola esquerda: Substituímos* $x=1{,}9$ *no denominador*→ $\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

*Límite pola dereita: Substituímos* $x=2{,}1$ *no denominador*→ $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

*f.* $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^3-3x-2}{x^3+5x^2+7x+3}\right)=\frac{(-1)^3-3\cdot(-1)-2}{(-1)^3+5(-1)^2+7(-1)+3}=\frac{0}{0}(\mathrm{Ind})=①\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x-2)}{(x+1)(x^2+4x+3)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}=$
$\frac{(-1)^2-(-1)-2}{(-1)^2+4\cdot(-1)+3}=\frac{0}{0}(Ind)=②=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+3)})\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)=\frac{-1-2}{-1+3}=-\frac{3}{2}$

*① Factorizamos os polinomios (tendo en conta que -1 é raíz e por iso os anula):*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline ② & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 7 & 3 \\ -1 & & -1 & -4 & -3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & -3 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

6. Calcula os seguintes límites nos que aparecen expresións irracionais:

a. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}+2}{x+3}$  b. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$  c. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$

*Denotaremos por $(Ind)$ as indeterminacións.*

*a.* $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}+2}{x+3}=\frac{\sqrt{5-1}+2}{5+3}=\frac{2+2}{5+3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

*b.* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{0}{0}(\mathrm{Ind})=①\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=②\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

*①Multiplicamos polo conxugado para "eliminar" a raíz do numerador*

*② Simplificamos.*

*c.* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}=\frac{0}{0}(\mathrm{Ind})=①\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8})^2-3^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x+8}+3)}{x+8-9}=$
$②\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x+8}+3)=(1+1)(\sqrt{1+8}+3)=2\cdot 6=12$

*① Multiplicamos polo conxugado para "eliminar" a raíz do denominador.*

*② Factorizamos e simplificamos.*

7. Calcula os seguintes límites de funcións no infinito:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3+4x+5}$  c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2x+5}{x-1}-2x\right)$

b. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^4}{3x^4+4x+5}$  d. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-\frac{x^4-1}{x^2+3}\right)$

*Denotaremos por $(Ind)$ as indeterminacións*

*a.* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3+4x+5}=\frac{\infty^2}{\infty^3+4\cdot\infty+5}=\frac{\infty}{\infty}(\mathrm{Ind})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{4}{\infty^2}+\frac{5}{\infty^3}}=\frac{0}{1+0+0}=0$

*b.* $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^4}{3x^4+4x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-x)^4}{3(-x)^4+4(-x)+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{3x^4-4x+5}=\frac{\infty}{\infty}(\mathrm{Ind})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{5}{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3-\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x^4}}=$
$\frac{1}{3-\frac{4}{\infty^3}+\frac{5}{\infty^4}}=\frac{1}{3-\frac{4}{\infty}+\frac{5}{\infty}}=\frac{1}{3-0+0}=\frac{1}{3}$

*c.* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2x+5}{x-1}-2x\right)=\infty-\infty(\mathrm{Ind})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+2x+5-2x^2+2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+5}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x}}=$
$\frac{4+\frac{5}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{4+0}{1-0}=4$

*d.* $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-\frac{x^4-1}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left((-x)^2-\frac{(-x)^4-1}{(-x)^2+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\frac{x^4-1}{x^2+3}\right)=\infty-\infty(\text{Ind})=$

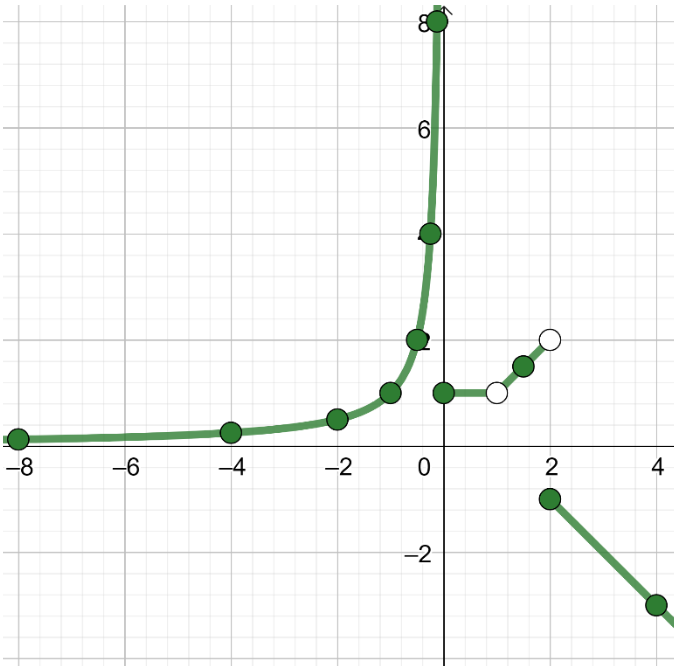
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2-x^4+1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{3+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=\frac{3+0}{1+0}=3$

8. Debuxa a gráfica da función $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ se\ x<0 \ ① \\ 1\ se\ 0\le x<1 \ ② \\ x\ se\ 1<x<2 \ ③ \\ -x+1\ se\ x\ge 2 \ ④\end{cases}$ e estuda as súas descontinuidades nos puntos $0, 1$ e $2$, xustificando a túa resposta mediante os límites laterais.

*Representación:*

*① É unha hipérbola. Facemos unha táboa de valores tendo en conta o dominio:*

| x | −1 | −2 | −4 | −8 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | 2 | 4 | 8 |




*② É unha recta horizontal que sempre vale 1.*

*③ É unha recta, facemos unha táboa de valores tendo en conta o dominio e incluímos o 1 para saber onde comeza e o 2 para saber onde remata:*

| x | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | 1,5 | 2 |

*Como o 1 non está incluído en ningún dos tramos, representámolo como un círculo oco.*

*④ É unha recta, facemos unha táboa de valores tendo en conta o dominio e incluímos o 2 para saber onde comeza:*

| x | 2 | 4 |
|---|---|---|
| y | 2 | −3 |

*Descontinuidade en* $x=0$*:*

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$
- *Límite pola dereita:* $\lim_{x\to0^+}f(x)=1$

*Entón, o límite de* $f(x)$ *cando* $x\to0$*, non existe, e a función presenta en* $x=0$ *unha descontinuidade inevitable de salto infinito.*

*Descontinuidade en* $x=1$*:*

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x\to1^-}f(x)=1$
- *Límite pola dereita:* $\lim_{x\to1^+}f(x)=1$

*Entón, existe o límite de* $f(x)$ *cando* $x\to1, \lim_{x\to1}f(x)=1.$

*Non obstante, non existe a función en* $x=1$, $f(1)$*. Polo tanto, a función presenta en* $x=1$ *un punto de descontinuidade evitable.*

*Descontinuidade en x = 2:*

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x\to2^-}f(x)=2$

- *Límite pola dereita:* $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$

*A pesar de que existen os límites laterais, son distintos. Polo tanto, non existe o límite* $\lim_{x\to 2} f(x)$*. Entón, en* $x = 2$*, a función ten unha descontinuidade inevitable de salto finito. A lonxitude do salto é* $2 - (-1) = 3$.

9. Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} x \; se \; x < 1 \\ \frac{1}{x} \; se \; x \geq 1 \end{cases}$.

*Ambos anacos da función son continuos, por ser funcións elementais continuas no seu dominio. Queda por estudar a continuidade no punto* $x = 1$ *que é onde se pasa dun anaco ao outro.*

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$
- *Límite á dereita:* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1} = 1$

*Polo tanto,* $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

*Por outra parte, a función está definida en* $x = 1$ *e* $f(1) = 1$ *(este número obtense substituíndo na parte da definición da función na que está o* $\geq$*).*

10. Indica os puntos nos que as funcións seguintes son continuas e xustifica a túa resposta:

a. $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$

*É continua en todo* $\mathbb{R}$*, por ser un polinomio.*

b. $g(x) = \sin x^2$

*É continua en todo* $\mathbb{R}$*, xa que é composición de dúas funcións,* $y = \sin x$ *e* $y = x^2$ *que a súa vez, son funcións continuas.*

c. $h(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x+5)}$

*É un cociente de dous polinomios, que son funcións continuas. Entón, é continua en todos os puntos, excepto nos que anulan o denominador, que son* $1$ *e* $-5$*. Polo tanto, é continua en* $\mathbb{R} - \{-5,1\}$.

11. Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 \; se \; x < 0 \\ 1 - x \; se \; 0 \leq x < 1 \\ x^2 \; se \; x \geq 1 \end{cases}$

*Os tres anacos da función son continuos, por ser funcións elementais continuas no seu dominio. Podemos asegurar, logo, que* $f(x)$ *é continua en* $\mathbb{R} - \{0,1\}$*. Queda por estudar a continuidade nos puntos* $x = 0$ *e* $x = 1$ *que é onde se pasa dun anaco a outro.*

*Continuidade en* $x = 0$*:*

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^3 + 1) = 0^3 + 1 = 1$
- *Límite á dereita:* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(1 - x) = 1 - 0 = 1$

*Os límites laterais coinciden, polo tanto,* $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

*Por outra parte, a función está definida en* $x = 0$ *e* $f(0) = 1 - 0 = 1$ *(este número obtense substituíndo na parte da definición da función na que está o* $x \geq 0$*).*

*En conclusión* $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ *e, como consecuencia, a función é continua en* $x = 0$.

*Continuidade en* $x = 1$*:*

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1}(1 - x) = 1 - 1 = 0$
- *Límite á dereita:* $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1^2 = 1$

*Os límites laterais son distintos, polo tanto, non existe o límite* $\lim_{x \to 1} f(x)$*. Como consecuencia,* $f(x)$ *ten unha descontinuidade inevitable de salto finito en* $x = 1$*. A lonxitude de salto é* $1 - 0 = 1$*.*
*Concluímos que* $f(x)$ *é continua en* $\mathbb{R} - \{1\}$*.*

12. Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 - x^2 \text{ se } x > 0 \end{cases}$

*A función é continua en* $\mathbb{R} - \{0\}$*. Imos estudar a continuidade no punto* $x = 0$ *que é punto no que se pasa dun anaco a outro.*
*Continuidade en* $x = 0$*:*

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0}(x^3 + 1) = 0^3 + 1 = 1$
- *Límite á dereita:* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0}(1 - x^2) = 1 - 0^2 = 1$

*Os límites laterais coinciden, polo tanto,* $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$*.*

*Por outra parte, a función está definida en* $x = 0$ *e* $f(0) = 0$ *(este número obtense collendo o valor indicado como* $x = 0$*).*
*Logo,* $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$ *e, como consecuencia, a función ten unha descontinuidade evitable en* $x = 0$*. A descontinuidade se "solucionaría" cambiando o valor de* $f(0)$ *por 1.*

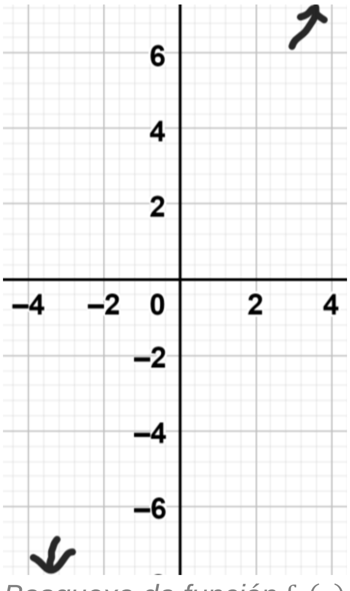
13. Calcula as asíntotas das seguintes funcións e fai un bosquexo da función:

*Denotaremos por* $(Ind)$ *as indeterminacións.*

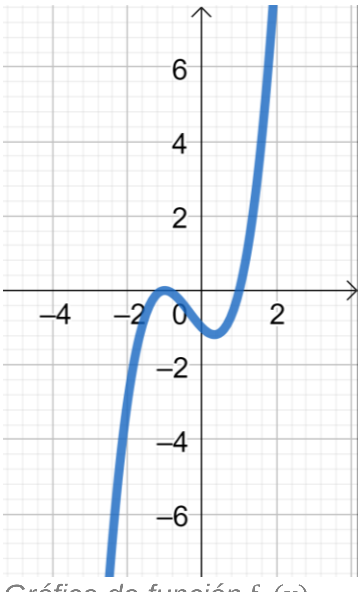
a. $f_1(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

*Non ten asíntotas porque é unha función polinómica, ten ramas parabólicas:*

$$\lim_{x \to \infty} f_1(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$$



*Bosquexo da función* $f_1(x) = x^3 + x^2 - x - 1$



*Gráfica da función* $f_1(x)$

b. $f_2(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

$x^2+1=0 \to x^2=-1 \to x=\pm\sqrt{-1}$ *non é un número enteiro, entón* $\mathrm{Dom}\, f_2 = \mathbb{R}$.

*Asíntotas verticais (son da forma* $x=a, a\in\mathbb{R}$*): non ten porque non hai ningún punto que anule o denominador.*

*Asíntotas horizontais (son da forma* $y=a, a\in\mathbb{R}$*):*

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1+\frac{1}{\infty^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

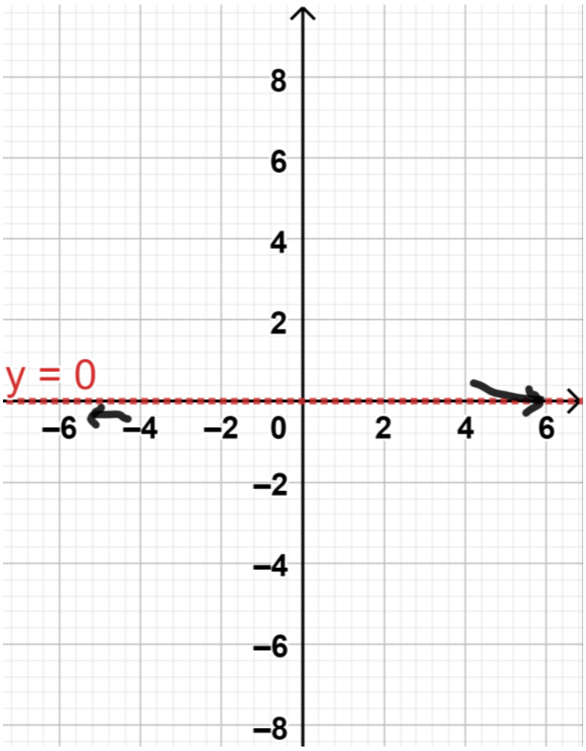
*Como o límite a infinito é 0 (un número), deducimos que* $y=0$ *é unha asíntota horizontal.*

*Imos estudar se a función* $(f_2)$ *está por enriba ou por debaixo da asíntota* $(f_A)$*:*

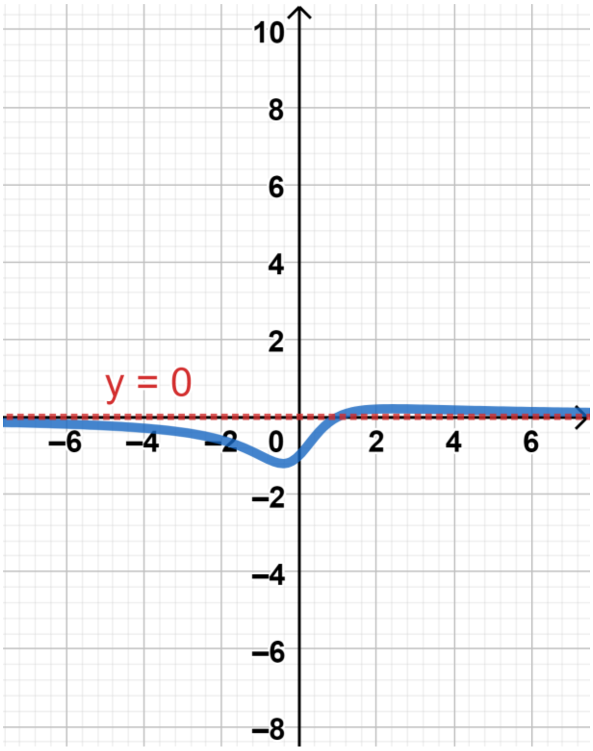
$\begin{cases} f_2(100) = \frac{100-1}{100^2+1} = 0{,}0099 \\ f_A(100) = 0 \end{cases} \to f_2(100) > f_A(100) \to$ *A función está por enriba da asíntota cando* $x\to\infty$.

$\begin{cases} f_2(-100) = \frac{-100-1}{(-100)^2+1} = -0{,}01 \\ f_A(-100) = 0 \end{cases} \to f_2(-100) < f_A(-100) \to$ *A función está por debaixo da asíntota cando* $x\to-\infty$.

*Asíntotas oblicuas (son da forma* $y=mx+n$*): non ten, porque ten asíntota horizontal.*




*Bosquexo da función* $f_2(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$




*Gráfica da función* $f_2$

c. $f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$$x-1=0 \to x=1 \to \mathrm{Dom}\, f_3 = \mathbb{R}-\{1\}.$$

*Asíntotas verticais (son da forma* $x=a, a\in\mathbb{R}$*): calculamos o límite en* $1$ *que é o punto que anula o denominador.*

$$\lim_{x\to 1} f_3(x) = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

*Entón,* $x = 1$ *é unha asíntota vertical. Imos calcular os límite laterais para poder bosquexala.*

*Límite pola esquerda (substituímos* $x = 0{,}9$ *no denominador):* $\lim_{x\to 1^-} f_3(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

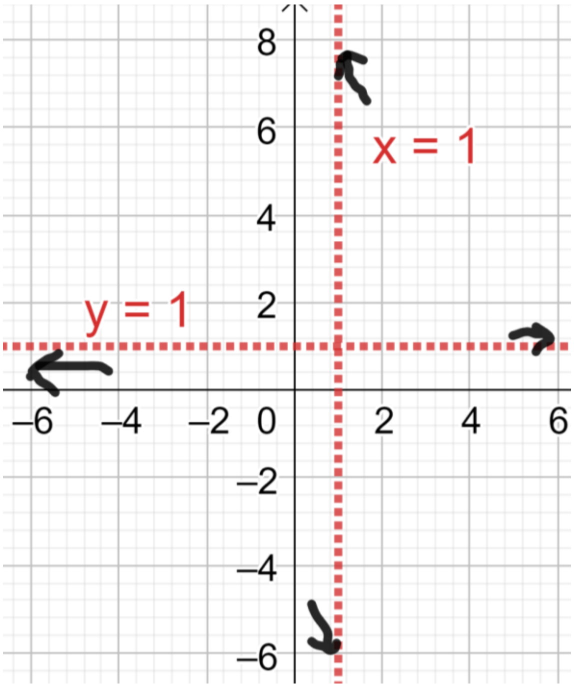
*Límite pola dereita (substituímos* $x = 1{,}1$ *no denominador):* $\lim_{x\to 1^+} f_3(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

*Asíntotas horizontais (son da forma* $y = a, a \in \mathbb{R}$*):*

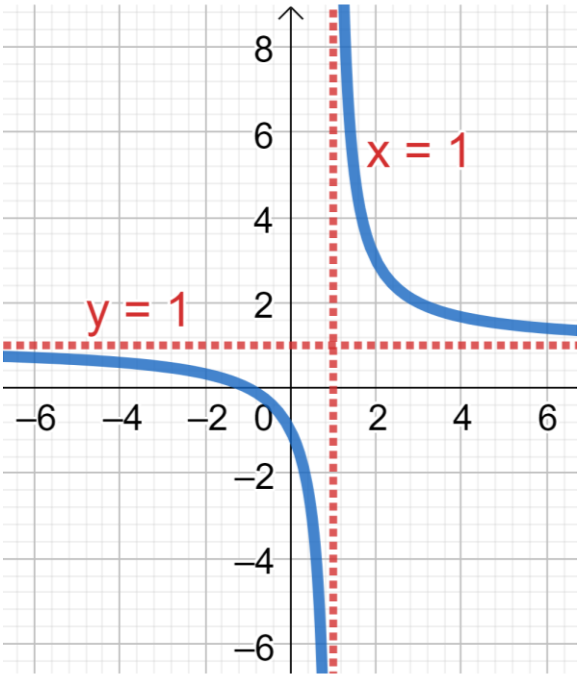
$$\lim_{x\to\infty} f_3(x) = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

*Como o límite a infinito é 1 (un número), deducimos que* $y = 1$ *é unha asíntota horizontal.*

*Asíntotas oblicuas (son da forma* $y = mx + n$*): non ten, porque ten asíntota horizontal.*




*Bosquexo da función* $f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$




*Gráfica da función* $f_3(x)$

d. $f_4(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$$x + 1 = 0 \to x = -1 \to \text{Dom } f_4 = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

*Asíntotas verticais (son da forma* $x = a, a \in \mathbb{R}$*): calculamos o límite en* $-1$ *que é o punto que anula o denominador.*

$$\lim_{x\to -1} f_4(x) = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

*Entón,* $x = -1$ *é unha asíntota vertical. Imos calcular os límite laterais para poder bosquexala.*

*Límite pola esquerda (substituímos* $x = -1{,}1$ *no denominador):* $\lim_{x\to -1^-} f_4(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

*Límite pola dereita (substituímos* $x = -0{,}9$ *no denominador):* $\lim_{x\to -1^+} f_4(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

*Asíntotas horizontais (son da forma* $y = a, a \in \mathbb{R}$*):*

$$\lim_{x\to\infty} f_4(x) = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty$$

*Como o límite a infinito é ∞, deducimos que non ten asíntotas horizontais.*

*Asíntotas oblicuas (son da forma* $y = mx + n$*):*

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0}$$

$= 1$

*Como* $m \neq \{0, \pm\infty\}$ *ten unha asíntota oblicua. Calculamos* $n$*:*

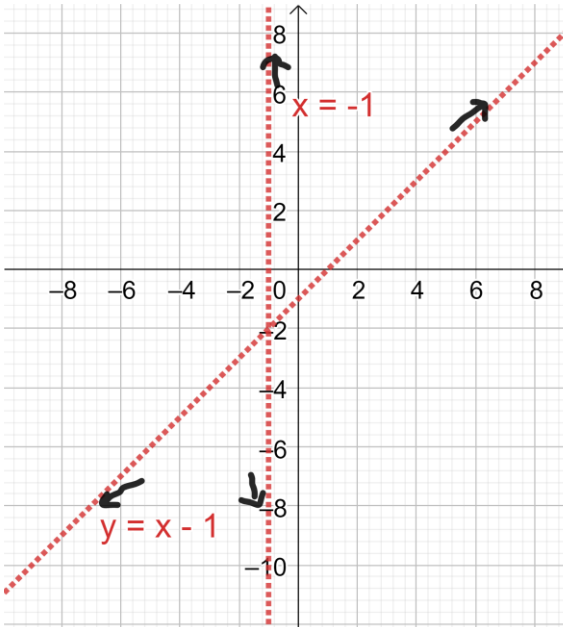
$$n = \lim_{x\to\infty}(f_4(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - 1\cdot x\right) = \infty - \infty(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{-1}{1+0} = -1$$

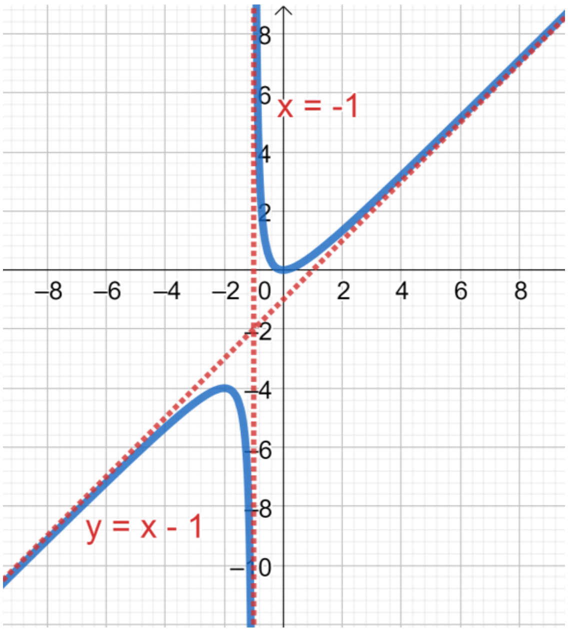
$y = x - 1$ *é unha asíntota oblicua de* $f_4(x)$. *Imos estudar se a función* ($f_4$) *está por enriba ou por debaixo da asíntota* ($f_A$)*:*

$\begin{cases} f_4(100) = \frac{100^2}{100+1} = 99{,}01 \\ f_A(100) = 100 - 1 = 99 \end{cases} \rightarrow f_4(100) > f_A(100) \rightarrow$ *A función está por enriba da asíntota cando* $x \rightarrow \infty$

$\begin{cases} f_4(-100) = \frac{(-100)^2}{-100+1} = -101{,}01 \\ f_A(-100) = -100 - 1 = -101 \end{cases} \rightarrow f_4(-100) < f_A(-100) \rightarrow$ *A función está por debaixo da asíntota cando* $x \rightarrow -\infty$.




*Bosquexo da función* $f_4(x) = \frac{x^2}{x+1}$




*Gráfica da función* $f_4$

e. $f_5(x) = \frac{x^3-2}{x^2-4}$

$$x^2 - 4 = 0 \to x^2 = 4 \to x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \to \mathrm{Dom}\, f_5 = \mathbb{R} - \{\pm 2\}.$$

*Asíntotas verticais (son da forma* $x = a, a \in \mathbb{R}$*): calculamos o límite en* $2$ *e* $-2$ *que son os puntos que anulan o denominador.*

$$\lim_{x\to -2} f_5(x) = \frac{-10}{0} = \pm\infty$$

*Entón,* $x = -2$ *é unha asíntota vertical. Imos calcular os límite laterais para poder bocexala.*

*Límite pola esquerda (substituímos* $x = -2{,}1$ *no denominador):* $\lim_{x\to -2^-} f_5(x) = \frac{-10}{0^+} = -\infty$

*Límite pola dereita (substituímos* $x = -1{,}9$ *no denominador):* $\lim_{x\to -2^+} f_5(x) = \frac{-10}{0^-} = +\infty$

$$\lim_{x\to 2} f_5(x) = \frac{6}{0} = \pm\infty$$

*Entón,* $x = 2$ *é unha asíntota vertical. Imos calcular os límite laterais para poder bosquexala.*

*Límite pola esquerda (substituímos* $x = 1{,}9$ *no denominador):* $\lim_{x\to 2^-} f_5(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$

*Límite pola dereita (substituímos* $x = 2{,}1$ *no denominador):* $\lim_{x\to 2^+} f_5(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$

*Asíntotas horizontais (son da forma* $y = a, a \in \mathbb{R}$*):*

$$\lim_{x\to\infty} f_5(x) = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\infty - \frac{2}{\infty^2}}{1 - \frac{4}{\infty^2}} = \frac{\infty - 0}{1 - 0} = \infty$$

*Como o límite a infinito é ∞, deducimos que non ten asíntotas horizontais.*

*Asíntotas oblicuas (son da forma* $y = mx + n$*):*

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f_5(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-2}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{x^3-4x} = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{1-\frac{2}{\infty^3}}{1-\frac{4}{\infty^2}}$$

$$= \frac{1-0}{1-0} = 1$$

*Como* $m \neq \{0, \pm\infty\}$ *ten unha asíntota oblicua. Calculamos* $n$*:*

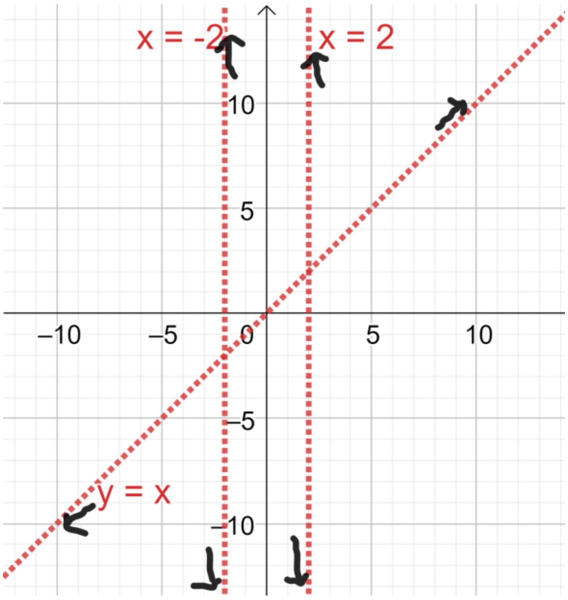
$$n = \lim_{x\to\infty}(f_5(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2-4} - 1\cdot x\right) = \infty - \infty(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2 - x^3 + 4x}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{4}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}{1-\frac{4}{\infty^2}} = \frac{0-0}{1-0} = 0$$

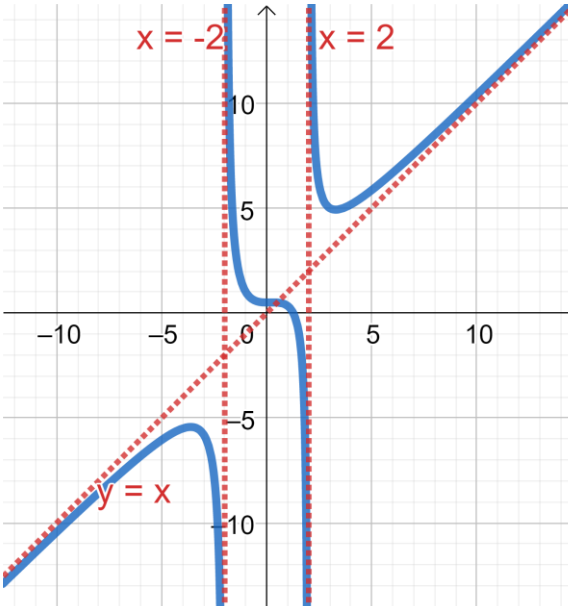
$y = x$ *é unha asíntota oblicua de* $f_5(x)$*. Imos estudar se a función (*$f_5$*) está por enriba ou por debaixo da asíntota (*$f_A$*):*

$\begin{cases} f_5(100) = \frac{100^3-2}{100^2-4} = 100{,}0398 \\ f_A(100) = 100 \end{cases}$ $\rightarrow f_5(100) > f_A(100) \rightarrow$ *A función está por enriba da asíntota cando* $x \rightarrow \infty$.

$\begin{cases} f_5(-100) = \frac{(-100)^3-2}{(-100)^2-4} = -100{,}04 \\ f_A(-100) = -100 \end{cases}$ $\rightarrow f_5(-100) < f_A(-100) \rightarrow$ *A función está por debaixo da asíntota cando* $x \rightarrow -\infty$.




*Bosquexo da función* $f_5(x) = \frac{x^3-2}{x^2-4}$




*Gráfica da función* $f_5$

f. $f_6(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \rightarrow \mathrm{Dom}\, f_6 = \mathbb{R} - \{\pm 1\}.$$

*Asíntotas verticais (son da forma $x = a, a \in \mathbb{R}$): calculamos o límite en $1$ e $-1$ que son os puntos que anulan o denominador.*

$$\lim_{x\to -1} f_6(x) = \frac{-1}{0} = \pm\infty$$

*Entón, $x = -1$ é unha asíntota vertical. Imos calcular os límite laterais para poder bosquexala.*

*Límite pola esquerda (substituímos $x = -1{,}1$ no denominador):* $\lim\limits_{x\to -1^-} f_6(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

*Límite pola dereita (substituímos $x = -0{,}9$ no denominador):* $\lim\limits_{x\to -1^+} f_6(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$$\lim_{x\to 1} f_6(x) = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

*Entón, $x = 1$ é unha asíntota vertical. Imos calcular os límite laterais para poder bosquexala.*

*Límite pola esquerda (substituímos $x = 0{,}9$ no denominador):* $\lim\limits_{x\to 1^-} f_6(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

*Límite pola dereita (substituímos $x = 1{,}1$ no denominador):* $\lim\limits_{x\to 1^+} f_6(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

*Asíntotas horizontais (son da forma $y = a, a \in \mathbb{R}$):*

$$\lim_{x\to\infty} f_6(x) = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{1 - \frac{1}{\infty^2}} = \frac{\infty}{1-0} = \infty$$

*Como o límite a infinito é ∞, deducimos que non ten asíntotas horizontais.*

*Asíntotas oblicuas (son da forma $y = mx + n$):*

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f_6(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\infty^2}}$$

$$= \frac{1}{1-0} = 1$$

*Como $m \neq \{0, \pm\infty\}$ ten unha asíntota oblicua. Calculamos $n$:*

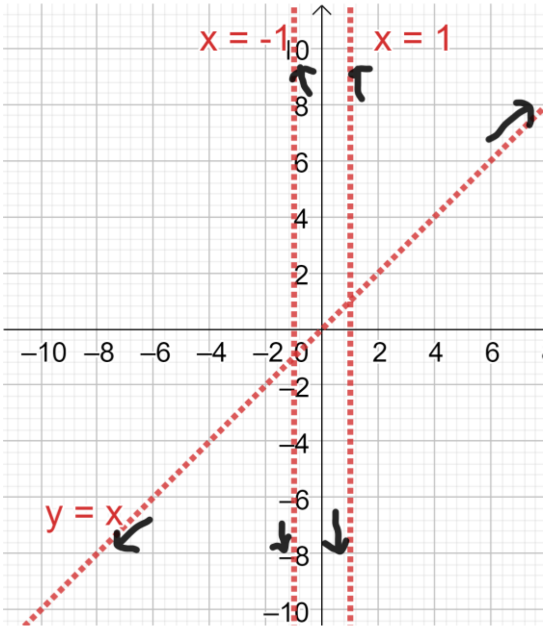
$$n = \lim_{x\to\infty} (f_6(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - 1\cdot x\right) = \infty - \infty (Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

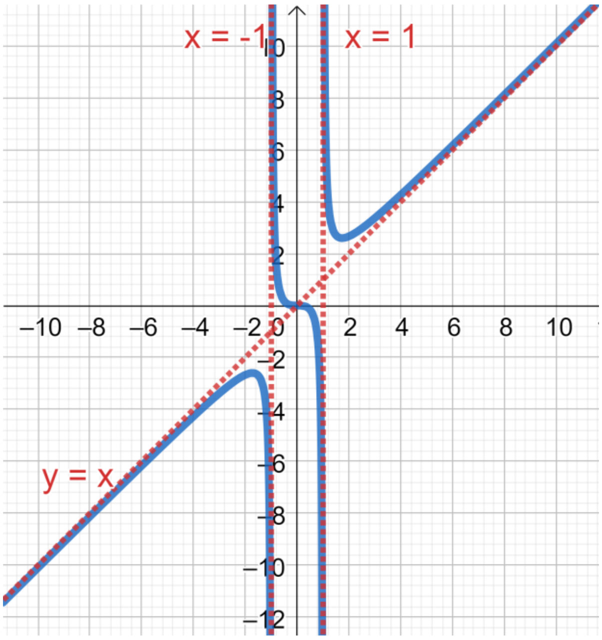
$y = x$ *é unha asíntota oblicua de* $f_6(x)$*. Imos estudar se a función (*$f_6$*) está por enriba ou por debaixo da asíntota (*$f_A$*):*

$\begin{cases} f_6(100) = \frac{100^3}{100^2-1} = 100{,}01 \\ f_A(100) = 100 \end{cases} \to f_6(100) > f_A(100) \to$ *A función está por enriba da asíntota cando* $x \to \infty$*.*

$\begin{cases} f_6(-100) = \frac{(-100)^3}{(-100)^2-1} = -100{,}01 \\ f_A(-100) = -100 \end{cases} \to f_6(-100) < f_A(-100) \to$ *A función está por debaixo da asíntota cando* $x \to -\infty$*.*




*Bosquexo da función* $f_6(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$




*Gráfica da función* $f_6$