LÍMITES E CONTINUIDADE

Exercicios autoavaliables

1. Calcula os seguintes límites:
   a. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x+1}{x+2}$
   b. $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x^2+3x-4}$
   c. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$
2. Calcula os seguintes límite no infinito:
   a. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{4x^2+3}{1-x^2}$
   b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-x^2+1}{x^4+3x}$
   c. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-1}{x+2}-x\right)$
3. Estuda a continuidade da función $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$.
4. Estuda as descontinuidades da función $f(x)=\begin{cases} 4x-1 \; se \; x<0 \\ 1+\frac{x^2}{4} \; se \; 0\le x\le 4 \\ 9-x \; se \; x>4 \end{cases}$, nos puntos 0 e 4.
5. Estuda a continuidade da seguinte función e se é descontinua nalgún punto especifica que tipo de descontinuidade presenta:

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x} \; se \; x\le -1 \\ x+2 \; se -1<x<4 \\ 2x^2-26 \; se \; x>4 \end{cases}$$

6. Calcula a para que a función $f(x)=\begin{cases} 3ax-1 \; se \; x<-1 \\ 5-ax \; se \; x\ge -1 \end{cases}$ sexa continua en $\mathbb{R}$.
7. Calcula as asíntotas das seguintes funcións:
   a. $f(x)=\frac{1}{x-1}$
   b. $g(x)=\frac{x^2+1}{x+2}$
   c. $h(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$

Solucións

Denotaremos por (Ind) as indeterminacións.

1. Calcula os seguintes límites:

a. $\lim_{x\to -2} \frac{3x+1}{x+2}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{3\cdot(-2)+1}{-2+2} = \frac{-5}{0} = \pm\infty$$

Calculamos os límites laterais:

Límite pola esquerda: Substituímos $x = -2{,}1 \to \lim_{x\to -2^-} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$

Límite pola dereita: Substituímos $x = -1{,}9 \to \lim_{x\to -2^+} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$

Como os límites laterais son distintos non existe o límite $\lim_{x\to -2} \frac{3x+1}{x+2}$.

b. $\lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x^2+3x-4}$

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x^2+3x-4} = \frac{(-4)^2-16}{(-4)^2+3\cdot(-4)-4} = \frac{0}{0}\ (Ind)$$

Factorizamos os polinomios tendo en conta que -4 *é raíz de ambos:*

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -16 \\ -4 & & -4 & 16 \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & -4 \\ -4 & & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-1)} = \lim_{x\to -4} \frac{x-4}{x-1} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

c. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{2-2}{\sqrt{2+7}-3} = \frac{0}{0}\ (Ind)$$

Multiplicamos polo conxugado do denominador para "eliminar" a raíz:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \sqrt{x+7}+3 = \sqrt{2+7}+3 = 6$$

2. Calcula os seguintes límite no infinito:

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3}{1-x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{1-x^2}=\frac{\infty}{\infty}(Ind)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{4+\frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1}=\frac{4+0}{0-1}=-4$$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^2+1}{x^4+3x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^2+1}{x^4+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^3-(-x)^2+1}{(-x)^4+3(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3-x^2+1}{x^4-3x}=\frac{\infty}{\infty}(Ind)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3-x^2+1}{x^4-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x^3}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{3x}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{3}{x^3}}=\frac{-\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}}$$

$$=\frac{-0-0+0}{1-0}=0$$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-x\right)=\infty-\infty(Ind)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-1}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}(Ind)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{-2-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{-2-0}{1+0}=-2$$

3. Estuda a continuidade da función $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$.

Os posibles puntos de descontinuidade son aqueles que anulan o denominador:

$$x^2-1=0\to x^2=1\to x=\pm\sqrt{1}=\pm 1\to Dom\,f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

Recordemos que unha función f é continua nun punto, c, se $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$

En $x=-1$:

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\frac{(-1)^2-(-1)-2}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}(Ind)=①\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

① Factorizamos os polinomios, tendo en conta que -1 é unha das raíces.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2\\ -1 & & -1 & 2\\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0}\end{array}\qquad\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -1\\ -1 & & -1 & 1\\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0}\end{array}$$

Polo tanto, o límite existe e é finito. Sen embargo, non existe $f(-1)\to f$ presenta unha descontinuidade evitable en $x=-1$, xa que esta descontinuidade pódese evitar facendo que $f(-1)=\lim\limits_{x\to-1}f(x)$.

En $x=1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1^2-1-2}{1^2-1} = -\frac{2}{0} = \pm\infty$$

Como o límite é infinito, f presenta unha descontinuidade inevitable de salto infinito en $x = 1$.

4. Estuda as descontinuidades da función $f(x) = \begin{cases} 4x-1 \; se \; x<0 \\ 1+\frac{x^2}{4} \; se \; 0 \le x \le 4 \\ 9-x \; se \; x>4 \end{cases}$, nos puntos 0 e 4.

Neste caso, non podemos calcular directamente os límites en 0 e en 4, só podemos calcular os seus límites laterais. Polo tanto, para que a función sexa continua en ditos puntos os límites laterais teñen que coincidir entre si e tamén ca función, é dicir, f é continua en c se $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$

En $x = 0$:

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(4x-1) = 4\cdot 0 - 1 = -1$
- *Límite pola dereita:* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right) = 1+\frac{0^2}{4} = 1$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, non existe o límite $\lim_{x\to 0} f(x)$. Ademais, ambos límites laterais son finitos (números), polo que a función presenta unha descontinuidade de salto finito en $x = 0$ e a lonxitude de salto é $1-(-1) = 2$.

En $x = 4$:

- *Límite pola esquerda:* $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4}\left(1+\frac{x^2}{4}\right) = 1+\frac{4^2}{4} = 1+4 = 5$
- *Límite pola dereita:* $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4}(9-x) = 9-4 = 5$
- $f(4) = 1+\frac{4^2}{4} = 5$

Como $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$, existe o límite $\lim_{x\to 4} f(x) = 5$. Polo tanto, $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$ e en consecuencia f é continua en $x = 4$.

5. Estuda a continuidade da seguinte función e se é descontinua nalgún punto especifica que tipo de descontinuidade presenta:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \; se \; x \le -1 \\ x+2 \; se \; -1 < x < 4 \\ 2x^2 - 26 \; se \; x > 4 \end{cases}$$

Podemos asegurar que f é continua en $\mathbb{R} - \{-1,4\}$ xa que está formada por funcións elementais continuas no seu dominio. Imos a estudar a continuidade en -1 e 4.

Neste caso, non podemos calcular directamente os límites en -1 e en 4, só podemos calcular os seus límites laterais. Polo tanto, para que a función sexa continua en ditos puntos os límites laterais teñen que coincidir entre si e tamén ca función, é dicir, f é continua en c se $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$

En $x = -1$:

- *Límite pola esquerda:* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{-1} = 1$
- *Límite pola dereita:* $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (x+2) = -1+2 = 1$
- $f(-1) = -\frac{1}{-1} = 1$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, *existe o límite* $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$. *Polo tanto,* $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ *e en consecuencia* f *é continua en* $x = -1$.

En $x = 4$:

- *Límite pola esquerda:* $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}(x+2) = 4+2 = 6$
- *Límite pola dereita:* $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}(2x^2-26) = 2\cdot 4^2 - 26 = 6$
- $f(4)$ *non existe*

Como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, *existe o límite* $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 6$. *Sen embargo,* $\lim\limits_{x\to 4} f(x) \neq f(4)$ *e en consecuencia* f *presenta unha descontinuidade evitable en* $x = 4$. *A descontinuidade solucionaríase se* $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4)$.

6. Calcula a para que a función $f(x) = \begin{cases} 3ax - 1 & se\ x < -1 \\ 5 - ax & se\ x \geq -1 \end{cases}$ sexa continua en $\mathbb{R}$.

Podemos afirmar que a función é continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$ *xa que está formada por funcións polinómicas que son continuas. Imos estudar a continuidade en* $x = -1$ *que é o punto no que cambia dun anaco ao outro. Entón, para que* f *sexa continua en* $\mathbb{R}$ *a función en* -1 *ten que coincidir co límite cando* $x \to 1$, *é dicir,* $f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

- $f(-1) = 5 - a\cdot(-1) = 5 + a$
- *Límite pola esquerda:* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (3ax-1) = 3a\cdot(-1) - 1 = -3a - 1$
- *Límite pola dereita:* $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (5-ax) = 5 - a\cdot(-1) = 5 + a$

Entón, f *é continua en* $x = -1$ *se:*

$$-3a - 1 = 5 + a \to -3a - a = 5 + 1 \to -4a = 6 \to a = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

7. Calcula as asíntotas das seguintes funcións:
   a. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$$x - 1 = 0 \to x = 1 \to Dom\, f = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Asíntotas verticais (son da forma $x = a, a \in \mathbb{R}$*): calculamos o límite en* 1 *que é o punto que anula o denominador.*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Entón, $x = 1$ *é unha asíntota vertical. Calculamos os límite laterais:*

Límite pola esquerda (substituímos $x = 0{,}9$ *no denominador):* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Límite pola dereita (substituímos $x = 1{,}1$ no denominador): $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Asíntotas horizontais (son da forma $y = a, a \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Como o límite a infinito é 0 (un número), deducimos que $y = 0$ é unha asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas (son da forma $y = mx + n$): non ten, porque ten asíntota horizontal.

b. $g(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$

$$x + 2 = 0 \to x = -2 \to Dom\ g = \mathbb{R} - \{-2\}.$$

Asíntotas verticais (son da forma $x = a, a \in \mathbb{R}$): calculamos o límite en -2 que é o punto que anula o denominador.

$$\lim_{x\to -2} g(x) = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

Entón, $x = -2$ é unha asíntota vertical. Imos calcular os límite laterais:

Límite pola esquerda (substituímos $x = -2{,}1$ no denominador): $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$

Límite pola dereita (substituímos $x = -1{,}9$ no denominador): $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$

Asíntotas horizontais (son da forma $y = a, a \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{\infty + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{\infty + 0}{1+0} = \infty$$

Como o límite a infinito é ∞, deducimos que non ten asíntotas horizontais.

Asíntotas oblicuas (son da forma $y = mx + n$):

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2x} = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Como $m \neq \{0, \pm\infty\}$, g ten unha asíntota oblicua. Calculamos n:

$$n = \lim_{x\to\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2} - 1 \cdot x\right) = \infty - \infty(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - 2x}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{x+2} = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{1+\frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{\infty}-2}{1+\frac{2}{\infty}} = \frac{0-2}{1+0} = -2$$

$y = x - 2$ é unha asíntota oblicua de $g(x)$. Imos estudar se a función (g) está por enriba ou por debaixo da asíntota (g_A):

$\begin{cases} g(100) = \frac{100^2+1}{100+2} = 98{,}05 \\ g_A(100) = 100-2 = 98 \end{cases} \rightarrow g(100) > g_A(100) \rightarrow$*A función está por enriba da asíntota cando* $x \rightarrow \infty$

$\begin{cases} g(-100) = \frac{(-100)^2+1}{-100+2} = -102{,}05 \\ g_A(-100) = -100-2 = -102 \end{cases} \rightarrow g(-100) < g_A(-100) \rightarrow$*A función está por debaixo da asíntota cando* $x \rightarrow -\infty$.

c. $h(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-1}$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \rightarrow Dom\, h = \mathbb{R} - \{\pm 1\}.$$

Asíntotas verticais (son da forma $x = a, a \in \mathbb{R}$): calculamos os límites en 1 e -1 que son os puntos que anulan o denominador.

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \frac{1^2-1-2}{1^2-1} = -\frac{2}{0} = \pm\infty$$

Entón, $x = 1$ é unha asíntota vertical de h. Imos calcular os límite laterais:

Límite pola esquerda (substituímos $x = 0{,}9$ no denominador): $\lim_{x\to 1^-} h(x) = -\frac{2}{0^-} = +\infty$

Límite pola dereita (substituímos $x = 1{,}1$ no denominador): $\lim_{x\to 1^+} h(x) = -\frac{2}{0^+} = -\infty$

$$\lim_{x\to -1} h(x) = \frac{(-1)^2-(-1)-2}{(-1)^2-1} = \frac{0}{0}(Ind) = ① \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1-2}{-1-1}$$

$$= \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

① Factorizamos os polinomios, tendo en conta que -1 é unhas das súas raíces:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Como o límite é finito, $x = -1$ non é unha asíntota vertical de h.

Asíntotas horizontais (son da forma $y = a, a \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \frac{\infty}{\infty}(Ind) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{1-0-0}{1-0} = 1$$

Como o límite a infinito é 1 (un número), deducimos que $y = 1$ *é unha asíntota horizontal.*

Asíntotas oblicuas (son da forma $y = mx + n$*): non ten, porque ten asíntota horizontal.*