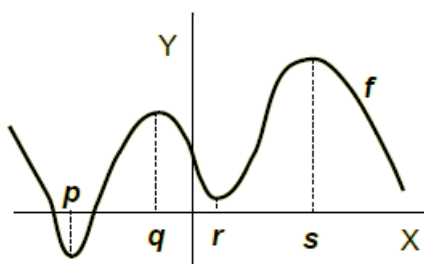




DERIVADAS. APLICACIÓN AO ESTUDO DUNHA FUNCIÓN.

Exercicios autoavaliables

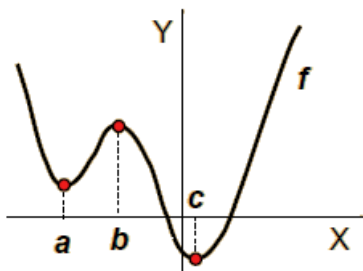
1. Sexa $f(x) = -2x^2 + 1$. Calcula a súa taxa de variación media nos intervalos $[-1, 0]$ e $[0, 3]$.
2. Dada a función $f(x) = -2x^2 + 1$, calcula $f'(3)$ mediante a definición.
3. Sexa a función $f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$. Estuda a súa derivabilidade no punto $x = 2$.
4. Sexa a función $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Estuda a derivabilidade en $x = 0$ utilizando as derivadas laterais.
5. Escribe $y = \frac{1}{x}$ como potencia negativa e obtén a súa derivada.
6. Dada a función $f(x) = \frac{1}{x}$, calcula as ecuacións das rectas tanxente e normal á súa gráfica no punto $x = 1$.
7. Calcula a derivada das seguintes funcións:
 - a. $y = 3x^2 + 2x$
 - b. $y = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 8$
 - c. $y = 5x^3 - 3x + 2\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x}$
 - d. $y = -4x^3 + 4x^2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \ln x$
8. Calcula a derivada das seguintes funcións:
 - a. $y = 3 \sin x - \arccos x$
 - b. $y = -2 \cos x + \arcsin x$
 - c. $y = \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \ln x$
 - d. $y = 2 \arctan x + \tan x$
9. Calcula a derivada das seguintes funcións. Ten en conta que son produto ou cociente de dúas funcións:
 - a. $y = (x^3 + 3x)\sqrt{x}$
 - b. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
 - c. $y = xe^x$
 - d. $y = \frac{2^x}{x^2}$
 - e. $y = x^2 \ln x$
 - f. $y = \frac{\arctan x}{x}$
 - g. $y = x \cos x$
 - h. $y = \frac{x^3 + 2x + 1}{\sin x}$
10. Calcula a derivada das seguintes funcións. Ten en conta que son composición de dúas funcións:
 - a. $y = \ln(5x + 3)$
 - b. $y = 5^{2x+1}$
 - c. $y = \sin(x^3 + x)$
 - d. $y = \cos(\sqrt{x})$
 - e. $y = \arcsin(x - 1)$
 - f. $y = (x^2 + 1)^{20}$
 - g. $y = \sqrt{\tan x}$
 - h. $y = e^{3x+5}$
 - i. $y = \log_2(\sqrt{x} + x)$
 - j. $y = \ln(\arccos x)$
11. Indica os intervalos nos que a función da gráfica seguinte é crecente e en cales é decrecente.



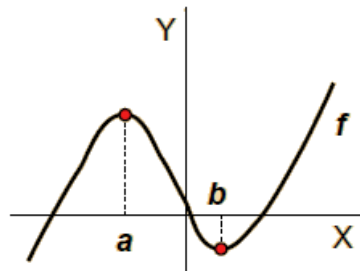
12. Estuda os intervalos de crecemento e decrecemento da función $f(x) = x^3 - 12x$.

13. Indica, nas gráficas seguintes, cales son os extremos relativos e absolutos:

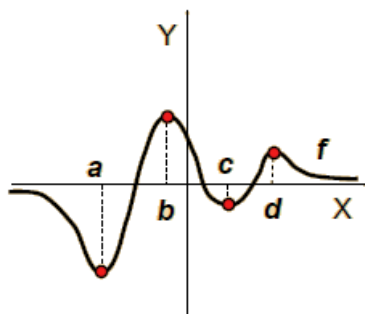
a.



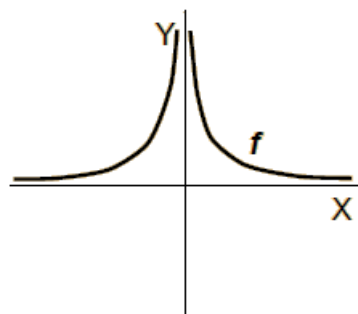
b.



c.



d.

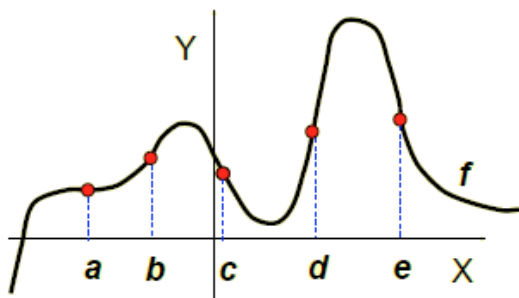


14. Estuda os puntos críticos e o crecemento e decrecemento das funcións seguintes:

a. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

b. $g(x) = x^4 - 2x^2$

15. Sabendo que os puntos vermellos son puntos de inflexión, indica cales son os intervalos de concavidade e convexidade.



16. Estuda os intervalos de concavidade e convexidade e os puntos de inflexión das funcións seguintes:

a. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

b. $g(x) = x^3 + 2x^2 + x$

c. $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$

17. Estuda os puntos críticos das seguintes funcións, utilizando a derivada segunda:

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b. $g(x) = -x^2 + 1$

c. $h(x) = x^3$

18. Estuda e representa a gráfica das seguintes funcións:

a. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$

b. $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

c. $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$

d. $i(x) = x^4 - 4x^2$

Solucións

1. Sexa $f(x) = -2x^2 + 1$. Calcula a súa taxa de variación media nos intervalos $[-1, 0]$ e $[0, 3]$.

$$TVM(f, [-1, 0]) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{(-2 \cdot 0^2 + 1) - (-2 \cdot (-1)^2 + 1)}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$TVM(f, [0, 3]) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{(-2 \cdot 3^2 + 1) - (-2 \cdot 0^2 + 1)}{3} = \frac{(-17 - 1)}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

2. Dada a función $f(x) = -2x^2 + 1$, calcula $f'(3)$ mediante a definición.

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(3+h)^2 + 1 - (-2 \cdot 3^2 + 1)}{h} = \frac{0}{0} =_{\text{Factorizamos}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(9 + 6h + h^2) + 1 - (-17)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-18 - 12h - 2h^2 + 18}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-12h - 2h^2}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-12 - 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -12 - 2h = -12$$

$$\text{Entón, } f'(3) = -12$$

3. Sexa a función $f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$. Estuda a súa derivabilidade no punto $x = 2$.

Calculamos as derivadas laterais en $x = 2$. Debemos ter en conta que ao coller un número h á esquerda de 0, $2 + h < 2$ e polo tanto, consideraremos o anaco da función definido para $x < 2$ e cando collemos 0 pola dereita e para $f(2)$ collemos o anaco definido para $x \geq 2$.

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(2+h) + 2 - (2-2)}{h} = \frac{0}{0} =_{\text{Factorizamos}} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2 - h + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

$$f'_+(2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h) - 2 - (2-2)}{h} = \frac{0}{0} =_{\text{Factorizamos}} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2 + h - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Como non coinciden as derivadas laterais, non existe $f'(2)$ e, polo tanto, a función non é derivable en $x = 2$.

4. Sexa a función $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Estuda a derivabilidade en $x = 0$ utilizando as derivadas laterais.

Calculamos as derivadas laterais en $x = 0$. De novo, para calcular $h \rightarrow 0^-$, collemos o anaco definido para $x < 0$ e viceversa para $h \rightarrow 0^+$.

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0 + h - 0^2}{h} = \frac{0}{0} =_{\text{Factorizamos}} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0^2}{h} = \frac{0}{0} =_{\text{Factorizamos}} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0$$



Como non coinciden as derivadas laterais, non existe $f'(0)$ e, polo tanto, a función non é derivable en $x = 0$.

5. Escribe $y = \frac{1}{x}$ como potencia negativa e obtén a súa derivada.

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \xrightarrow{\text{entón}} f$ é unha función da forma $y = x^n$. Así deducimos que a súa derivada é:

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

6. Dada a función $f(x) = \frac{1}{x}$, calcula as ecuacións das rectas tanxente e normal á súa gráfica no punto $x = 1$.

A ecuación da recta tanxente é $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ e a da recta normal $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$.

Polo tanto, necesítase calcular, para ambos os casos, o valor da función en $x = 1$, $f(1)$, e a derivada no mesmo punto, $f'(1)$.

- $f(1) = \frac{1}{1} = 1$
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (exercicio 5), entón $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$

Entón, a ecuación da recta tanxente é:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 1 - x + 1 \rightarrow y = -x + 2$$

E a ecuación da recta normal é:

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) \rightarrow y - 1 = -\frac{1}{-1} \cdot (x - 1) \rightarrow y = 1 + x - 1 \rightarrow y = x$$

7. Calcula a derivada das seguintes funcións:

Estas funcións están formadas pola suma (ou resta) de outras funcións. Polo tanto, a súa derivada será a suma (ou resta) das derivadas de ditas funcións:

$$y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

a. $y = 3x^2 + 2x$

Esta función é suma doutras dúas, $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 2x$. Entón, $y' = f'(x) + g'(x)$:

$$y' = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 2 \cdot 1 = 6x + 2$$

b. $y = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 8$

$$y' = 3 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 5 \cdot 1 + 0 = 9x^2 + 4x - 5$$

c. $y = 5x^3 - 3x + 2\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x}$

En primeiro lugar imos reescribir os sumandos da función como potencias:



$$y = 5x^3 - 3x + 2x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 5x^{-1}$$

E agora derivamos:

$$\begin{aligned} y' &= 5 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} - 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} + 5 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = \\ &= 15x^2 - 3 + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 5x^{-2} = 15x^2 - 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^2} \end{aligned}$$

d. $y = -4x^3 + 4x^2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \ln x$

En primeiro lugar imos reescribir os monomios da función como potencias:

$$y = -4x^3 + 4x^2 - 2x^{-1} + 3x^{-2} + \ln x$$

E agora derivamos:

$$\begin{aligned} y' &= -4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 2 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} + 3 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} + \frac{1}{x} = \\ &= -12x^2 + 8x + 2x^{-2} - 6x^{-3} + \frac{1}{x} = -12x^2 + 8x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} \end{aligned}$$

8. Calcula a derivada das seguintes funcións:

Estas funcións están formadas pola suma (ou resta) de outras funcións. Polo tanto, a súa derivadas será a suma (ou resta) das derivadas de ditas funcións.

$$y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

a. $y = 3 \sin x - \arccos x$

$$y' = 3 \cdot \cos x - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 3 \cos x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b. $y = -2 \cos x + \arcsin x$

$$y' = -2 \cdot (-\sin x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \sin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c. $y = \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \ln x$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{2x \ln 2} + \frac{1}{4x} = \frac{2 + \ln 2}{4x \ln 2}$$

d. $y = 2 \arctan x + \tan x$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \cos^2 x + 1 + x^2}{(1+x^2) \cos^2 x}$$

9. Calcula a derivada das seguintes funcións. Ten en conta que son produto ou cociente de dúas funcións:



Recordemos que:

- Se $y = f(x) \cdot g(x)$ a súa derivada é $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Se $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ a súa derivada é $y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

a. $y = (x^3 + 3x)\sqrt{x}$

Esta función é produto de $f(x) = x^3 + 3x$ e $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, cuxas derivadas son:

$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} + 3 \cdot 1 = 3x^2 + 3$ e $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Entón a derivada da función é:

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 + 3) \cdot \sqrt{x} + (x^3 + 3x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(3x^2 + 3)\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3 + 3x}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{(3x^2 + 3) \cdot 2x + x^3 + 3x}{2\sqrt{x}} = \frac{6x^3 + 6x + x^3 + 3x}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3 + 9x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

Esta función é cociente de $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$, cuxas derivadas son:

$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 2x$ e $g'(x) = 2x^{2-1} - 0 = 2x$. Entón a derivada da función é:

$$y' = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$$

c. $y = xe^x$

Esta función é produto das funcións $f(x) = x$ e $g(x) = e^x$, cuxas derivadas son $f'(x) = 1$ e $g'(x) = e^x$. Entón a derivada da función é:

$$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$$

d. $y = \frac{2^x}{x^2}$

Esta función é cociente de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$, cuxas derivadas son:

$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$ e $g'(x) = 2x^{2-1} = 2x$. Entón a derivada da función é:

$$y' = \frac{2^x \ln 2 \cdot x^2 - 2^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2^x \cdot x(x \ln 2 - 2)}{x^4} = \frac{2^x(x \ln 2 - 2)}{x^3}$$

e. $y = x^2 \ln x$

Esta función é produto de $f(x) = x^2$ e $g(x) = \ln x$, cuxas derivadas son $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$. Entón a derivada da función é:

$$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$



f. $y = \frac{\arctan x}{x}$

Esta función é cociente de $f(x) = \arctan x$ e $g(x) = x$, cuxas derivadas son:

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g'(x) = 1$. Entón a derivada da función é:

$$y' = \frac{\frac{1}{(x^2+1)} \cdot x - \arctan x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{x^2+1} - \frac{(x^2+1) \arctan x}{x^2+1}}{x^2} = \frac{x - (x^2+1) \arctan x}{x^2 \cdot (x^2+1)} =$$

$$= \frac{x - (x^2+1) \arctan x}{x^4 + x^2}$$

g. $y = x \cos x$

Esta función é produto de $f(x) = x$ e $g(x) = \cos x$, cuxas derivadas son $f'(x) = 1$ e $g'(x) = -\sin x$. Entón a derivada da función é:

$$y' = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \sin x$$

h. $y = \frac{x^3+2x+1}{\sin x}$

Esta función é cociente de $f(x) = x^3 + 2x + 1$ e $g(x) = \sin x$, cuxas derivadas son:

$f'(x) = 3x^2 + 2$ e $g'(x) = \cos x$. Entón a derivada da función é:

$$y' = \frac{(3x^2+2) \cdot \sin x - (x^3+2x+1)(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{(3x^2+2) \sin x + (x^3+2x+1) \cos x}{\sin^2 x}$$

10. Calcula a derivada das seguintes funcións. Ten en conta que son composición de dúas funcións:

Recordemos que se $y = f(g(x))$ a súa derivada é $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

a. $y = \ln(5x+3)$

Esta función é composición de $g(x) = 5x+3$ con $f(x) = \ln x$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = 5 \cdot 1 + 0 = 5$ e $f'(x) = \frac{1}{x}$, logo a derivada da función é:

$$y' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{5x+3} \cdot 5 = \frac{5}{5x+3}$$

b. $y = 5^{2x+1}$

Esta función é composición de $g(x) = 2x+1$ con $f(x) = 5^x$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = 2 \cdot 1 + 0 = 2$ e $f'(x) = 5^x \cdot \ln 5$, logo a derivada da función é:

$$y' = 5^{g(x)} \ln 5 \cdot g'(x) = 5^{2x+1} \ln 5 \cdot 2$$

c. $y = \sin(x^3+x)$

Esta función é composición de $g(x) = x^3+x$ con $f(x) = \sin x$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = 3 \cdot x^{3-1} + 1 = 3x^2 + 1$ e $f'(x) = \cos x$, logo a derivada da función é:

$$y' = \cos g(x) \cdot g'(x) = \cos(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1) = (3x^2 + 1) \cos(x^3 + x)$$

d. $y = \cos(\sqrt{x})$

Esta función é composición de $g(x) = \sqrt{x}$ con $f(x) = \cos x$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $f'(x) = -\sin x$, logo a derivada da función é:

$$y' = -\sin g(x) \cdot g'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

e. $y = \arcsin(x - 1)$

Esta función é composición de $g(x) = x - 1$ con $f(x) = \arcsin x$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = 1$ e $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, logo a derivada da función é:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}} \cdot g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

f. $y = (x^2 + 1)^{20}$

Esta función é composición de $g(x) = x^2 + 1$ con $f(x) = x^{20}$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 2x$ e $f'(x) = 20 \cdot x^{20-1} = 20x^{19}$, logo a derivada da función é:

$$y' = 20(g(x))^{19} \cdot g'(x) = 20(x^2 + 1)^{19} \cdot 2x = 40x(x^2 + 1)^{19}$$

g. $y = \sqrt{\tan x}$

Esta función é composición de $g(x) = \tan x$ con $f(x) = \sqrt{x}$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, logo a derivada da función é:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2 \cos^2 x \sqrt{\tan x}}$$

h. $y = e^{3x+5}$

Esta función é composición de $g(x) = 3x + 5$ con $f(x) = e^x$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = 3 \cdot 1 + 0 = 3$ e $f'(x) = e^x$, logo a derivada da función é:

$$y' = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{3x+5} \cdot 3 = 3e^{3x+5}$$

i. $y = \log_2(\sqrt{x} + x)$

Esta función é composición de $g(x) = \sqrt{x} + x$ con $f(x) = \log_2 x$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ e $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$, logo a derivada da función é:

$$y' = \frac{1}{g(x) \cdot \ln 2} \cdot g'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x} + x) \ln 2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) = \frac{1}{(\sqrt{x} + x) \ln 2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right) =$$

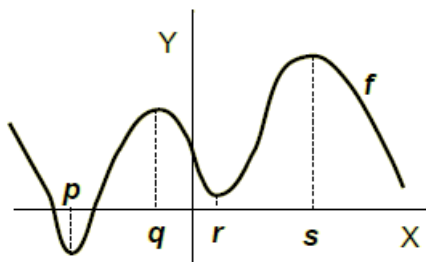
$$= \frac{1 + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + x) \ln 2} = \frac{1 + 2\sqrt{x}}{(2x + 2x\sqrt{x}) \ln 2}$$

j. $y = \ln(\arccos x)$

Esta función é composición de $g(x) = \arccos x$ con $f(x) = \ln x$. As derivadas destas funcións son $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $f'(x) = \frac{1}{x}$, logo a derivada da función é:

$$y' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{\arccos x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x}$$

11. Indica os intervalos nos que a función da gráfica seguinte é crecente e en cales é decrecente.



A función é crecente nos intervalos $(p, q) \cup (r, s)$, e é decrecente nos intervalos $(-\infty, p) \cup (q, r) \cup (s, +\infty)$.

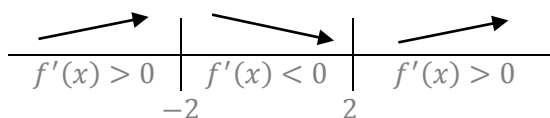
12. Estuda os intervalos de crecemento e decrecemento da función $f(x) = x^3 - 12x$.

Calcúlase a derivada primeira e iguálase a cero para ver onde se producen os cambios de signo:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

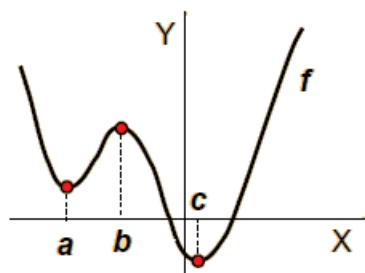
Entón, o crecemento e decrecemento queda como no esquema seguinte:



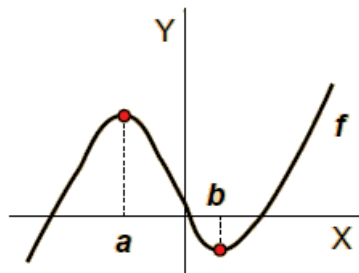
É dicir, é crecente nos intervalos $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ e decrecente en $(-2, 2)$.

13. Indica, nas gráficas seguintes, cales son os extremos relativos e absolutos:

a.

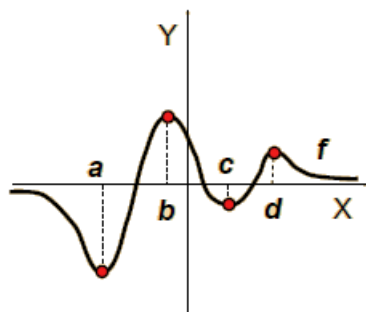


b.



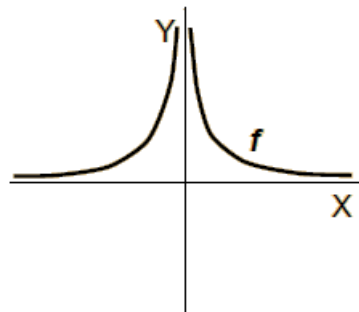
En $x = a$ hai un mínimo relativo, en $x = b$ hai un máximo relativo e en $x = c$ un mínimo absoluto. Pero non hai máximo absoluto, xa que a gráfica tende a infinito e por esta razón non se chega a alcanzar o máximo absoluto.

c.



En $x = a$ hai un máximo relativo e en $x = b$ un mínimo relativo. Non se teñen nin máximos nin mínimos absolutos, porque ten ramas infinitas.

d.



En $x = a$ hai un mínimo absoluto, en $x = b$ un máximo absoluto, en $x = c$ un mínimo relativo e en $x = d$ un máximo relativo.

Non hai máximos nin mínimos, nin absolutos nin relativos.

14. Estuda os puntos críticos e o crecemento e decrecemento das funcións seguintes:

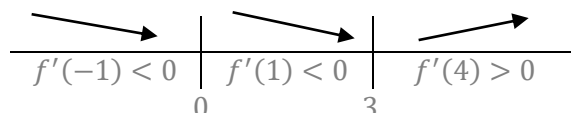
a. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

Calcúlase a derivada primeira e iguálase a cero para obter os puntos críticos:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \rightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Só se teñen dous puntos críticos, $x = 0$ e $x = 3$. Estúdase agora o crecemento e decrecemento nos intervalos determinados por estes dous puntos críticos:



É dicir, é decrecente en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$ e crecente en $(3, +\infty)$.

Entón, f ten un mínimo relativo en $x = 3$ e, en $x = 0$ non hai máximo nin mínimo. O mínimo está no punto de coordenadas $(3, f(3)) = (3, -17)$.

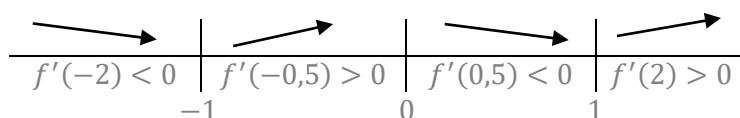
b. $g(x) = x^4 - 2x^2$

Calcúlase a derivada primeira e iguálase a cero para obter os puntos críticos:

$$g'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$g'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

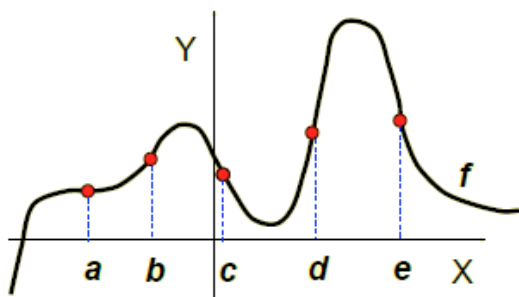
Os puntos críticos son agora $x = 0, x = 1$ e $x = -1$. Estudamos o crecemento e o decrecemento:



É dicir, é decrecente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ e crecente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Hai un máximo no punto $(0, f(0)) = (0, 0)$ e mínimos nos puntos $(-1, f(-1)) = (-1, -1)$ e $(1, f(1)) = (1, -1)$.

15. Sabendo que os puntos vermellos son puntos de inflexión, indica cales son os intervalos de concavidade e convexidade.



A función é cóncava nos intervalos $(-\infty, a) \cup (b, c) \cup (d, e)$ e convexa nos intervalos $(a, b) \cup (c, d) \cup (e, +\infty)$.

16. Estuda os intervalos de concavidade e convexidade e os puntos de inflexión das funcións seguintes:

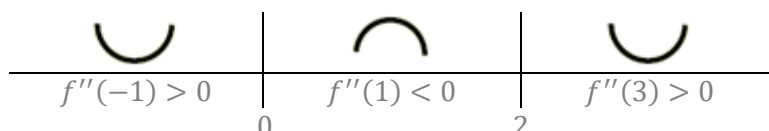
a. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

Calculamos a derivada segunda e iguálase a cero para obter os posibles puntos de inflexión:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \rightarrow f''(x) = 12x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 24x = 0 \rightarrow 12x(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 12x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Estúdanse agora os intervalos de concavidade e convexidade mediante o signo da derivada segunda nos intervalos que determinan os puntos $x = 0$ e $x = 2$. Para iso, como sempre, danse valores a $f''(x)$ que estean nestes intervalos. O resultado é o indicado na figura seguinte:



Polo tanto, a función é convexa en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ e cóncava no intervalo $(0, 2)$.

Entón, a función alcanza puntos de inflexión en $x = 0$ e $x = 2$. Para calcular a coordenada y dos puntos, substitúese na función orixinal $(0, f(0)) = (0, 10)$ e $(2, f(2)) = (2, -6)$.

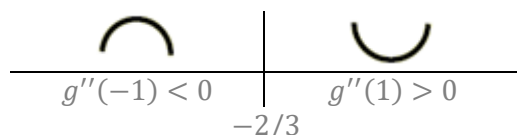
b. $g(x) = x^3 + 2x^2 + x$

Calcúlase a derivada segunda:

$$g'(x) = 3x^2 + 4x + 1 \rightarrow g''(x) = 6x + 4$$

$$g''(x) = 0 \rightarrow 6x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Estúdase a concavidade e a convexidade:



Polo tanto, a función é cóncava no intervalo $(-\infty, -\frac{2}{3})$ e convexa no intervalo $(-\frac{2}{3}, +\infty)$.

Entón, hai un punto de inflexión en $(-\frac{2}{3}, g(-\frac{2}{3})) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{27})$.

$$g(-\frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3})^3 + 2(-\frac{2}{3})^2 - \frac{2}{3} = -\frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-8+24-18}{27} = -\frac{2}{27}$$

c. $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$

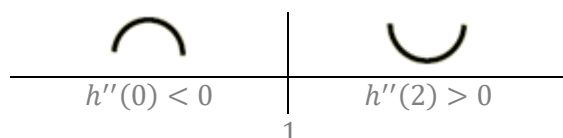
Calculamos a derivada segunda e a igualamos a 0 para obter os posibles puntos de inflexión:

A función é o cociente das función $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$, polo tanto dérívase mediante a fórmula $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

$$h'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = -2 \cdot (x-1)^{-2} \rightarrow h''(x) = -2 \cdot (-2) \cdot (x-1)^{-2-1} \cdot 1 = 4(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$h''(x) = 0 \rightarrow \frac{4}{(x-1)^3} = 0$ non ten solución. Entón a función non ten puntos de inflexión, estudamos a signo da derivada segunda á esquerda e á dereita de 1 que é o punto que non pertence ao dominio:



h é cóncava en $(-\infty, 1)$ e convexa $(1, +\infty)$. Non ten puntos de inflexión, xa que o punto de cambio de cóncava a convexa non pertence ao dominio.

17. Estuda os puntos críticos das seguintes funcións, utilizando a derivada segunda:

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Calculamos os puntos críticos, utilizando a derivada primeira:

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

Calculamos a derivada segunda: $f''(x) = 2$.

Como é constante, $f''(2) = 2 > 0$. Entón, f ten en $x = 2$ un mínimo.

De feito, esta función é unha parábola “aberta cara arriba”, debido a que o coeficiente da x^2 , que é 1, é positivo. Por esta razón, sábese que o seu vértice debe ser un mínimo.

b. $g(x) = -x^2 + 1$

Calcúlanse os puntos críticos, utilizando a derivada primeira:

$$g'(x) = -2x$$

$$g'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Calcúlase a derivada segunda: $g''(x) = -2$.

De novo, a súa derivada segunda é constante, $g''(0) = -2 < 0$. Entón, g ten en $x = 0$ un máximo.

Tamén neste caso trátase dunha parábola, pero agora, “aberta cara abaixo”.

c. $h(x) = x^3$

Os puntos críticos son, neste caso:

$$h'(x) = 3x^2$$

$$h'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

A súa derivada segunda é $h''(x) = 6x$. Entón, $h''(0) = 0$. Isto quere dicir que non se pode utilizar o criterio da derivada segunda para determinar se é máximo, mínimo, ou ningunha das dúas cousas. Hai que estudar, neste caso, o crecemento e decrecemento. Pero $h'(x) > 0$ se $x \neq 0$, isto quere dicir que a función sempre é crecente. Polo tanto, en $x = 0$ non hai nin máximo nin mínimo. En realidade, o que hai é un punto de inflexión porque, como se pode comprobar facilmente, hai cambio de curvatura

18. Estuda e representa a gráfica das seguintes funcións:

a. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$

Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ porque é unha función polinómica.

Puntos de corte cos eixes:

- Eixe OX ($y = 0$): $x^3 + 2x^2 + x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0 \rightarrow x(x + 1)^2 = 0 \rightarrow$
 $\begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases} \rightarrow$ Os puntos de corte son $(0,0)$ e $(-1,0)$.
- Eixe OY ($x = 0$): $f(0) = 0 \rightarrow$ O punto de corte é o $(0,0)$.

Simetrías:

- $f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 - x = -x^3 + 2x^2 - x \neq f(x) \rightarrow f$ non é par.
- $-f(-x) = x^3 - 2x^2 + x \neq f(x) \rightarrow f$ non é impar.

Monotonía e extremos relativos:

Calculamos a derivada e igualámola a 0 para obter os puntos críticos:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -1 \end{cases}$$

Estudamos o signo da derivada nos intervalos determinados polos puntos críticos:

$$\begin{array}{c} \nearrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\ \hline f'(-2) > 0 \quad | \quad f'(-0,5) < 0 \quad | \quad f'(0) < 0 \\ \hline \quad \quad -1 \quad \quad \quad -1/3 \quad \quad \end{array}$$

$f(x)$ é crecente en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$ e decrecente en $(-1, -\frac{1}{3})$. Ten un máximo en $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ e un mínimo en $(-\frac{1}{3}, f(-\frac{1}{3})) = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{27})$.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{27} + 2 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{-1 + 6 - 9}{27} = -\frac{4}{27}$$

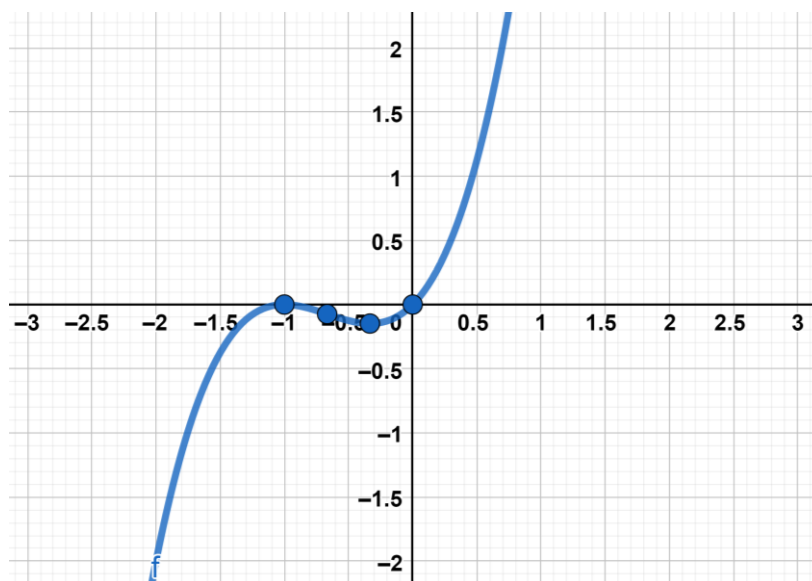
Curvatura e puntos de inflexión: a función é convexa no intervalo $(-\infty, -\frac{2}{3})$ e cóncava no intervalo $(-\frac{2}{3}, +\infty)$. Ten un punto de inflexión en $(-\frac{2}{3}, f(-\frac{2}{3})) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{27})$ (exercicio 16b).

Asíntotas: non ten por ser unha función polinómica, pero ten ramas parabólicas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Representación gráfica:



b. $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Dominio: $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow Dom\ g = \mathbb{R} - \{1\}$

Puntos de corte:

- Eixe OX ($y = 0$): $\frac{x+1}{x-1} = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow g$ corta ao eixe OX no $(-1, 0)$.
- Eixe OY ($x = 0$): $g(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1 \rightarrow g$ corta ao eixe OY no punto $(0, -1)$.

Simetrías: $g(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{-(x-1)}{-(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} \neq g(x) \rightarrow g(x)$ non é simétrica

$-g(-x) = -\frac{x-1}{x+1} \neq g(x) \rightarrow g(x)$ non é antisimétrica

Monotonía e extremos relativos:

Calculamos a derivada e a igualamos a 0 para obter os puntos críticos:

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$g'(x) = 0 \rightarrow -\frac{2}{(x-1)^2} = 0$ non ten solución. Entón a función non ten puntos críticos, estudamos a signo da derivada á esquerda e á dereita de 1 que é o punto que non pertence ao dominio:

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ g'(0) < 0 \quad | \quad g'(2) < 0 \\ \downarrow \\ 1 \end{array}$$

g é decrecente en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Non ten máximos nin mínimos.

Curvatura e puntos de inflexión: g é cóncava en $(-\infty, 1)$ e convexa $(1, +\infty)$. Non ten puntos de inflexión, xa que o punto de cambio de cóncava a convexa non pertence ao dominio (exercicio 16c)

Asíntotas:

- *Verticais: $x = 1$ é unha asíntota vertical*

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

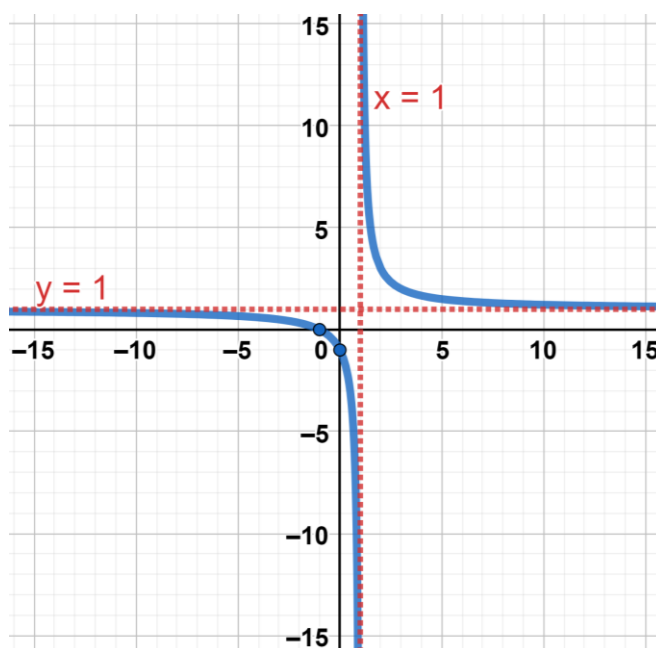
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

- *Horizontais: $y = 1$ é unha asíntota horizontal*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

- *Oblicuas: non ten*

Representación gráfica:



c. $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Dominio: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } h = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Cortes cos eixes:

- *Eixe OX ($y = 0$): $\frac{1}{x^2-1} = 0$ non ten solución, entón h non corta ao eixe OX.*
- *Eixe OY ($x = 0$): $h(0) = -1 \rightarrow h$ corta ao eixe OY no punto $(0, -1)$.*

Simetrías:

$$h(-x) = \frac{1}{(-x)^2-1} = \frac{1}{x^2-1} = h(x) \rightarrow h \text{ é par.}$$

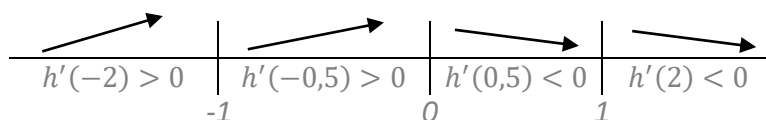
Monotonía e extremos relativos:

Calculamos a derivada da función e igualámola a 0. A función é composición de $g(x) = x^2 - 1$ e $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Entón a derivada é:

$$h'(x) = -(g(x))^{-1-1} \cdot g'(x) = -(x^2 - 1)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$h'(x) = 0 \rightarrow -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Estudamos o signo da derivada nos intervalos delimitados por 0 e por 1 e -1 (que son os puntos que non pertencen ao dominio):



A función é crecente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ e decrecente en $(0, 1) \cup (1, \infty)$. Ten un máximo relativo en $(0, -1)$.

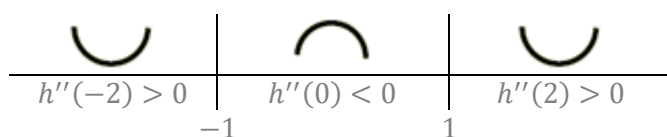
Curvatura e puntos de inflexión:

Calculamos a derivada segunda e a igualamos a 0 para obter os posibles puntos de inflexión. A derivada é o cociente das función $f(x) = -2x$ e $g(x) = (x^2 - 1)^2$, polo tanto derivase mediante a fórmula $h''(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

$$h''(x) = \frac{-2 \cdot (x^2 - 1)^2 - (-2x) \cdot 2 \cdot (x^2 - 1)^{2-1} \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-2(\mathbf{x^2 - 1}) \cdot (x^2 - 1 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^4} = -2 \cdot \frac{-3x^2 - 1}{(x^2 - 1)^3}$$

$$h''(x) = 0 \rightarrow -2 \cdot \frac{-3x^2 - 1}{(x^2 - 1)^3} = 0 \rightarrow -3x^2 - 1 = 0 \rightarrow -3x^2 = 1 \rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \text{ non ten solución}$$

Entón non ten puntos de inflexión. Estudamos o signo da segunda derivada nos intervalos determinados puntos que non están no dominio $x = \pm 1$:



h é convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e cóncava en $(-1, 1)$. Non ten puntos de inflexión, xa que os puntos de cambio de curvatura non pertencen ao dominio.

Asíntotas

- Verticais:

Hai que estudar as posibles asíntotas en $x = -1$ e en $x = 1$.

En $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \frac{1}{(-1)^2 - 1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Calculamos as derivadas laterais:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \frac{1}{1^2 - 1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Calculamos as derivadas laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Polo tanto, hai asíntotas verticais en $x = 1$ e en $x = -1$.

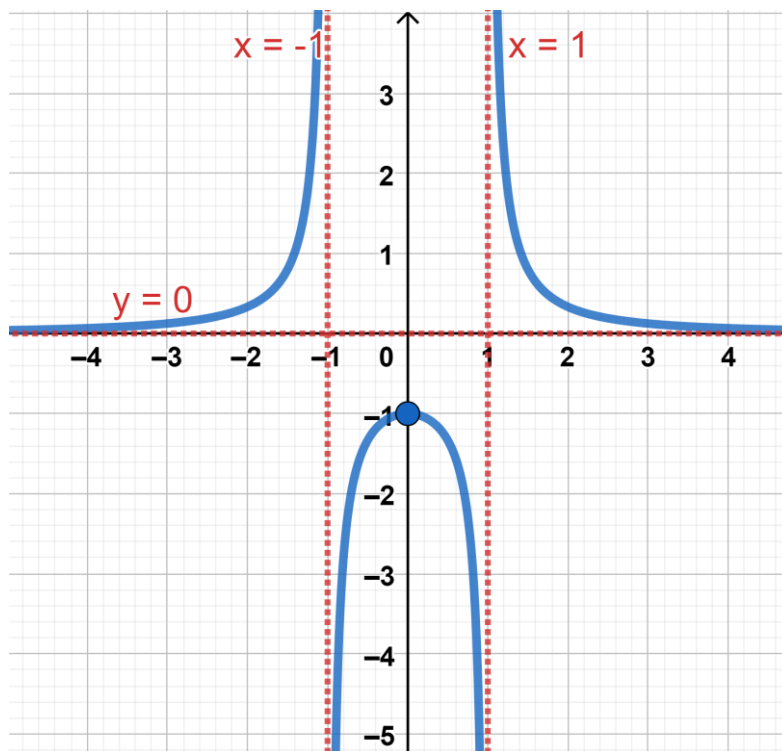
- Asíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{1}{\infty^2 - 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Entón, hai unha asíntota horizontal en $y = 0$.

- Asíntotas oblicuas: non ten porque ten horizontais.

Representación gráfica:



d. $i(x) = x^4 - 4x^2$

Dominio: Dom $i = \mathbb{R}$ por ser unha función polinómica.

Simetrías: $i(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = i(x) \rightarrow i(x)$ é par.

Cortes cos eixes:

- Eixe OX ($y = 0$): $x^4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x^2(x+2)(x-2) = 0 \rightarrow$
$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2,0) \\ x-2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2,0) \end{cases}$$
- Eixe OY ($x = 0$): $i(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

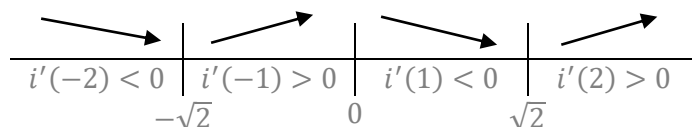
Monotonía e extremos relativos:

Calculamos a derivada e igualámola a 0 para obter os puntos críticos:

$$i'(x) = 4 \cdot x^{4-1} - 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 4x^3 - 8x$$

$$4x^3 - 8x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{4} \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Estudamos o signo da derivada nos intervalos determinados polos puntos críticos:



Entón, $i(x)$ é decrecente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ e crecente en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. Ten un mínimo relativo en $(-\sqrt{2}, i(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, -4)$ e en $(\sqrt{2}, i(\sqrt{2})) = (\sqrt{2}, -4)$ e un máximo relativo en $(0, i(0)) = (0, 0)$.

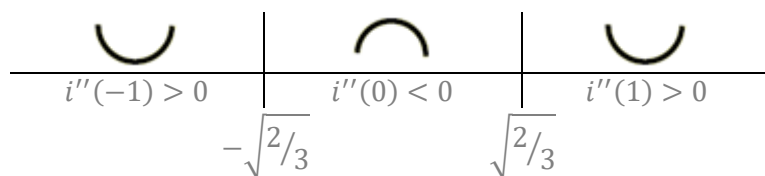
Curvatura e puntos de inflexión:

Calculamos a segunda derivada e igualámola a 0 para obter os posibles puntos de inflexión:

$$i''(x) = 12x^2 - 8$$

$$12x^2 - 8 = 0 \rightarrow 12x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{12} \rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Estudamos o signo da derivada segunda nos intervalos determinados por ditos puntos:



$i(x)$ é convexa en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$ e cóncava en $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Ten puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, i\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, i\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$.

Representación gráfica:

