

DERIVADAS. APLICACIÓN AO ESTUDO DUNHA FUNCIÓN

Exercicios autoavaliables

1. A lonxitude dunha barra metálica segundo a temperatura ven dada pola función $l(t) = 0,1t + 120$, onde t é a temperatura en °C e $l(t)$ a medida da barra en cm.

Calcula a taxa de variación media da lonxitude da barra entre $t = 10^{\circ}\text{C}$ e $t = 40^{\circ}\text{C}$. Que representa fisicamente esa variación?

2. A velocidade dun móvil vén dada pola expresión $v(t) = 2t^2$ (t , tempo en segundos e $v(t)$, velocidade en m/s). Calcula $v'(2)$ e explica que mide ese valor.
3. Estuda a derivabilidade da función $f(x) = |x + 5| = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x \geq -5 \\ -x - 5 & \text{se } x < -5 \end{cases}$ no punto $x = -5$.
4. Calcula a derivada das seguintes funcións:
- | | |
|--|--|
| a. $y = x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x}$ | e. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ |
| b. $y = 8x \ln x - 5e^x$ | f. $y = \tan(\ln x)$ |
| c. $y = (3x^5 - 5x^2 + 7)^8$ | g. $y = 7 \cos^4(2x - 3)$ |
| d. $y = 7^{x+1} \cdot e^{4x^3-2x}$ | h. $y = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ |
5. Acha a ecuación da recta tanxente á curva $y = 3x^2 - 8x + 2$ no punto $x_0 = 2$.
6. Estuda a monotonía e a curvatura da función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$. Clasifica os seus puntos singulares e obtén os seus puntos de inflexión (se os ten).
7. Estuda e representa a gráfica da función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Soluciones

1. A lonxitude dunha barra metálica segundo a temperatura ven dada pola función $l(t) = 0,1t + 120$, onde t é a temperatura en °C e $l(t)$ a medida da barra en cm.

Calcula a taxa de variación media da lonxitude da barra entre $t = 10^\circ\text{C}$ e $t = 40^\circ\text{C}$. Que representa fisicamente esa variación?

Calculase a taxa de variación media de $l(t)$ no intervalo $[10, 40]$:

$$TVM(l, [10, 40]) = \frac{l(40) - l(10)}{40 - 10} = \frac{124 - 121}{30} = 0,1 \text{ cm/}^\circ\text{C}$$

Esa taxa de variación describe o ritmo de variación medio da lonxitude da barra entre 10°C e 40°C é dicir, a dilatación media da barra por cada °C que varíe a temperatura (cada °C que aumenta a temperatura, a barra estírase 0,1 cm, por termo medio).

2. A velocidade dun móvil vén dada pola expresión $v(t) = 2t^2$ (t , tempo en segundos e $v(t)$, velocidade en m/s). Calcula $v'(2)$ e explica que mide ese valor.

$$v'(t) = 2 \cdot 2t = 4t \rightarrow v'(2) = 8$$

A derivada nun punto expresa o estado de cambio da función nese punto. Neste caso expresa o cambio de velocidad, ou sexa, a aceleración.

Para controlar as unidades, recordase que, en xeral, a derivada é:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

sendo agora f a velocidad e x o tempo, logo o cociente será metros/segundo entre segundos, que represéntase como m/s^2 .

3. Estuda a derivabilidade da función $f(x) = |x + 5| = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x \geq -5 \\ -x - 5 & \text{se } x < -5 \end{cases}$ no punto $x = -5$.

Calculamos as derivadas laterais en $x = -5$:

Observemos que cando consideramos un número h á esquerda de 0, o número $-5 + h < -5$ e polo tanto, collemos o anaco definido para $x < -5$. Analogamente, se tomamos un número h á dereita de 0, o número $-5 + h > -5$ e polo tanto, collemos o anaco definido para $x \geq -5$

$$f'_-(5) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-5 + h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-(-5 + h) - 5) - (-5 + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1$$

$$f'_+(5) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-5 + h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-5 + h + 5) - (-5 + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

Como non coinciden as derivadas laterais, non existe $f'(-5)$ e, polo tanto, a función non é derivable.

4. Calcula a derivada das seguintes funcións:

a. $y = x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x}$

En primeiro lugar escribimos todos os termos como potencias

$$y = x^3 + x^2 - x + 1 - x^{-3} + x^{\frac{1}{3}}$$

E, a continuación, derivamos (tendo en conta que son da forma $y = x^n$ e que a derivada dunha suma (ou resta) e a suma (ou resta) das derivadas):

$$\begin{aligned} y' &= 3 \cdot x^{3-1} + 2 \cdot x^{2-1} - 1 + 0 - (-3) \cdot x^{-3-1} + \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = 3x^2 + 2x - 1 + 3x^{-4} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \\ &= 3x^2 + 2x - 1 + \frac{3}{x^4} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

b. $y = 8x \ln x - 5e^x$

Por unha banda, temos a función $f_1(x) = 8x \ln x$ que está formada por unha constante, $k_1 = 8$, e o produto de dúas funcións $g_1(x) = x$ e $h_1(x) = \ln x$. Polo tanto, para derivala usamos a fórmula $f'_1(x) = k_1 \cdot (g'_1(x) \cdot h_1(x) + g_1(x) \cdot h'_1(x))$.

$$f'_1(x) = 8 \cdot \left(1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \right) = 8(\ln x + 1)$$

Por outra banda, a función $f_2(x)$ formada por unha constante $k_2 = 5$ e a función $g_2(x) = e^x$ cuxa derivada é $f'_2(x) = k_2 \cdot g'_2(x) = 5 \cdot e^x$. Entón a derivada da función é:

$$y' = 8(\ln x + 1) - 5e^x$$

c. $y = (3x^5 - 5x^2 + 7)^8$

Esta función é composición de $g(x) = 3x^5 - 5x^2 + 7$ con $f(x) = x^8$. Como a derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 8x^7$ e a de $g(x)$ é $g'(x) = 3 \cdot 5 \cdot x^4 - 5 \cdot 2 \cdot x = 15x^4 - 10x$, a súa derivada é:

$$y' = 8(g(x))^7 \cdot g'(x) = 8(3x^5 - 5x^2 + 7)^7 \cdot (15x^4 - 10x)$$

d. $y = 7^{x+1} \cdot e^{4x^3-2x}$

Esta función é producto de $f(x) = 7^{x+1}$ e $g(x) = e^{4x^3-2x}$. Polo tanto, a súa derivada vén dada pola fórmula $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Imos calcular as respectivas derivadas::

$f(x) = 7^{x+1}$ é composición de $f_1(x) = x + 1$ con $f_2(x) = 7^x$, cuxas derivadas son $f'_1(x) = 1$ e $f'_2(x) = 7^x \cdot \ln 7$. Así a súa derivada é:

$$f'(x) = f'_2(f_1(x)) \cdot f'_1(x) = 7^{x+1} \ln 7 \cdot 1 = 7^{x+1} \ln 7$$

$g(x) = e^{4x^3-2x}$ é composición de $g_1(x) = 4x^3 - 2x$ con $g_2(x) = e^x$, cuxas derivadas son $g'_1(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 1 = 12x^2 - 2$ e $g'_2(x) = e^x$. Así, a derivada de g é:

$$g'(x) = g'_2(g_1(x)) \cdot g'_1(x) = e^{4x^3-2x} \cdot (12x^2 - 2)$$

Concluímos entón que a derivada da función é:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 7^{x+1} \ln 7 \cdot e^{4x^3-2x} + 7^{x+1} \cdot e^{4x^3-2x} \cdot (12x^2 - 2)$$

e. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

A función é cociente de $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x} + 1$ cuxas derivadas son $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Entón a súa derivada é:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} + 1) - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2} \end{aligned}$$

f. $y = \tan(\ln x)$

Esta función é composición de $g(x) = \ln x$ con $f(x) = \tan x$, cuxas derivadas son $g'(x) = \frac{1}{x}$ e $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Entón a súa derivada é:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{\cos^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cos^2(\ln x)}$$

g. $y = 7 \cos^4(2x - 3)$

Esta función está formada por unha constante, $k = 7$, e a composición de $g(x) = 2x - 3$ con $f(x) = \cos^4 x$. Á súa vez, $f(x)$ é composición de $h(x) = \cos x$ con $i(x) = x^4$, cuxas derivadas son $h'(x) = -\sin x$ e $i'(x) = 4x^3$. Entón a derivada de f é:

$$f'(x) = i'(h(x)) \cdot h'(x) = 4(\cos x)^3 \cdot (-\sin x) = -4 \sin x \cos^3 x$$

Por outra banda, a derivada de g é $g'(x) = 2$. Entón a derivada da función é:

$$\begin{aligned} y' &= 7 \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) = 7 \cdot (-4) \cdot \sin(2x - 3) \cdot \cos^3(2x - 3) \cdot 2 = \\ &= -56 \sin(2x - 3) \cos^3(2x - 3) \end{aligned}$$

h. $y = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

A función é composición de $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ con $f(x) = \arctan x$.

A función g é cociente das funcións $h(x) = x^2 - 1$ e $i(x) = x^2 + 1$, cuxas derivadas son $h'(x) = 2x$ e $i'(x) = 2x$. Entón,

$$g'(x) = \frac{h'(x) \cdot i(x) - h(x) \cdot i'(x)}{(i(x))^2} = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Así a derivada da función é:

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{[(x^2 + 1)^2 + (x^2 - 1)^2] \cdot (x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{4x}{x^4 + 2x^2 + 1 + x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{4x}{2x^4 + 2} = \frac{2 \cdot 2x}{2(x^4 + 1)} = \frac{2x}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

5. Acha a ecuación da recta tanxente á curva $y = 3x^2 - 8x + 2$ no punto $x_0 = 2$.

Sexa $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$.

A ecuación da recta tanxente a f en $x = 2$ vén dada pola fórmula: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$.

Temos que calcular $f'(2)$ e $f(2)$:

$$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x - 8 \cdot 1 = 6x - 8 \rightarrow f'(2) = 2 \cdot 6 - 8 = 4$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 2 = -2$$

Substituímos os valores e obtemos que a ecuación da recta tanxente é:

$$y - (-2) = 4 \cdot (x - 2) \rightarrow y = -2 + 4x - 8 \rightarrow y = 4x - 10$$

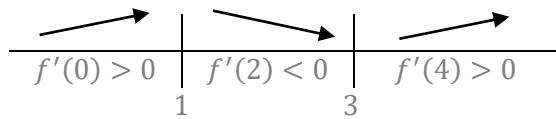
6. Estuda a monotonía e a curvatura da función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$. Clasifica os seus puntos singulares e obtén os seus puntos de inflexión (se os ten).

Calculamos a derivada e igualámola a 0 para obter os puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 \cdot 1 = 3x^2 - 12x + 9$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \{1$$

Estudamos o signo da derivada nos intervalos determinados polos puntos singulares:



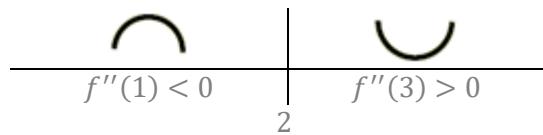
f é crecente nos intervalos $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ e decrecente en $(1, 3)$. Ten un máximo relativo en $(1, f(1)) = (1, 8)$ e un mínimo relativo en $(3, f(3)) = (3, 4)$.

Calculamos a derivada segunda e igualámola a 0 para obter os posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3 \cdot 2 \cdot x - 12 \cdot 1 = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$$

Estudamos o signo da segunda derivada nos intervalos determinados por $x = 2$.



f é cóncava en $(-\infty, 2)$ e convexa en $(2, \infty)$. Ten un punto de inflexión en $(2, f(2)) = (2, 6)$.

7. Estuda e representa a gráfica da función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ por ser unha función polinómica.

Puntos de corte cos eixes:

- Eixe OX ($y = 0$): $x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \rightarrow x(x - 2)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x = 2 \rightarrow (2,0) \end{cases}$
- Eixe OY ($x = 0$): $f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

Simetrías:

$$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 4(-x) = -x^3 - 4x^2 - 4x \neq f(x) \rightarrow f \text{ non é par.}$$

$$-f(-x) = x^3 + 4x^2 + 4x \neq f(x) \rightarrow f \text{ non é impar}$$

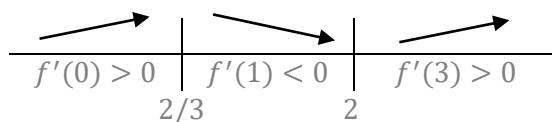
Monotonía e extremos relativos:

Calculamos a derivada e igualámola a 0 para obter os puntos singulares:

$$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} - 4 \cdot 2 \cdot x + 4 \cdot 1 = 3x^2 - 8x + 4$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} 2 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

Estudamos o signo da derivada nos intervalos determinados polos puntos singulares:



f é crecente nos intervalos $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$ e decrecente en $(\frac{2}{3}, 2)$. Ten un máximo relativo en $(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3})) = (\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$ e un mínimo relativo en $(2, f(2)) = (2, 0)$.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{8}{3} = \frac{8 - 48 + 72}{27} = \frac{32}{27}$$

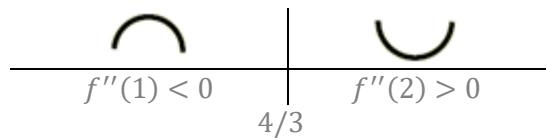
Curvatura e puntos de inflexión:

Calculamos a derivada segunda e igualámola a 0 para obter os posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3 \cdot 2 \cdot x - 8 \cdot 1 = 6x - 8$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 8 = 0 \rightarrow 6x = 8 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Estudamos o signo da segunda derivada nos intervalos determinados por $x = \frac{4}{3}$.



f é cónica en $(-\infty, \frac{4}{3})$ e convexa en $(\frac{4}{3}, +\infty)$. Ten un punto de inflexión en $\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{27}\right)$.

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27} - \frac{64}{9} + \frac{16}{3} = \frac{64 - 192 + 144}{27} = \frac{16}{27}$$

Asíntotas: non ten por ser unha función polinómica. Ten ramas parabólicas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Representación gráfica:

