Exercicios autoavaliables

1. A lonxitude dunha barra metálica segundo a temperatura ven dada pola función $l(t) = 0{,}1t + 120$, onde t é a temperatura en ℃ e $l(t)$ a medida da barra en cm.

   Calcula a taxa de variación media da lonxitude da barra entre $t = 10℃$ e $t = 40℃$. Que representa fisicamente esa variación?

2. A velocidade dun móbil vén dada pola expresión $v(t) = 2t^2$ (t, tempo en segundos e $v(t)$, velocidade en m/s). Calcula $v'(2)$ e explica que mide ese valor.
3. Estuda a derivabilidade da función $f(x) = |x + 5| = \begin{cases} x + 5 \text{ se } x \geq -5 \\ -x - 5 \text{ se } x < -5 \end{cases}$ no punto $x = -5$.
4. Calcula a derivada das seguintes funcións:
   a. $y = x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x}$
   b. $y = 8x \ln x - 5e^x$
   c. $y = (3x^5 - 5x^2 + 7)^8$
   d. $y = 7^{x+1} \cdot e^{4x^3 - 2x}$
   e. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$
   f. $y = \tan(\ln x)$
   g. $y = 7\cos^4(2x - 3)$
   h. $y = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

5. Acha a ecuación da recta tanxente á curva $y = 3x^2 - 8x + 2$ no punto $x_0 = 2$.
6. Estuda a monotonía e a curvatura da función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$. Clasifica os seus puntos singulares e obtén os seus puntos de inflexión (se os ten).
7. Estuda e representa a gráfica da función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Solucións

1. A lonxitude dunha barra metálica segundo a temperatura ven dada pola función $l(t) = 0{,}1t + 120$, onde t é a temperatura en ℃ e $l(t)$ a medida da barra en cm.

   Calcula a taxa de variación media da lonxitude da barra entre $t = 10℃$ e $t = 40℃$. Que representa fisicamente esa variación?

   Calculase a taxa de variación media de $l(t)$ no intervalo $[10, 40]$:

$$TVM(l, [10{,}40]) = \frac{l(40) - l(10)}{40 - 10} = \frac{124 - 121}{30} = 0{,}1\ cm/℃$$

   Esa taxa de variación describe o ritmo de variación medio da lonxitude da barra entre $10℃$ e $40℃$ é dicir, a dilatación media da barra por cada ℃ que varíe a temperatura (cada ℃ que aumenta a temperatura, a barra estírase $0{,}1\ cm$, por termo medio).

2. A velocidade dun móbil vén dada pola expresión $v(t) = 2t^2$ (t, tempo en segundos e $v(t)$, velocidade en m/s). Calcula $v'(2)$ e explica que mide ese valor.

$$v'(t) = 2 \cdot 2t = 4t \rightarrow v'(2) = 8$$

   A derivada nun punto expresa o estado de cambio da función nese punto. Neste caso expresa o cambio de velocidade, ou sexa, a aceleración.

   Para controlar as unidades, recordase que, en xeral, a derivada é:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

   sendo agora f a velocidade e x o tempo, logo o cociente será metros/segundo entre segundos, que represéntase como m/s^2.

3. Estuda a derivabilidade da función $f(x) = |x + 5| = \begin{cases} x + 5\ se\ x \geq -5 \\ -x - 5\ se\ x < -5 \end{cases}$ no punto $x = -5$.

   Calculamos as derivadas laterais en $x = -5$:

   Observemos que cando consideramos un número h á esquerda de 0, o número $-5 + h < -5$ e polo tanto, collemos o anaco definido para $x < -5$. Analogamente, se tomamos un número h á dereita de 0, o número $-5 + h > -5$ e polo tanto, collemos o anaco definido para $x \geq -5$

$$f'_-(5) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-(-5+h) - 5) - (-5+5)}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} -1 = -1$$

$$f'_+(5) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-5+h+5) - (-5+5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

   Como non coinciden as derivadas laterais, non existe $f'(-5)$ e, polo tanto, a función non é derivable.

4. Calcula a derivada das seguintes funcións:
   a. $y = x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x}$

En primeiro lugar escribimos todos os termos como potencias

$$y = x^3 + x^2 - x + 1 - x^{-3} + x^{\frac{1}{3}}$$

E, a continuación, derivamos (tendo en conta que son da forma $y = x^n$ e que a derivada dunha suma (ou resta) e a suma (ou resta) das derivadas):

$$y' = 3 \cdot x^{3-1} + 2 \cdot x^{2-1} - 1 + 0 - (-3) \cdot x^{-3-1} + \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = 3x^2 + 2x - 1 + 3x^{-4} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= 3x^2 + 2x - 1 + \frac{3}{x^4} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

b. $y = 8x \ln x - 5e^x$

Por unha banda, temos a función $f_1(x) = 8x\, ln\, x$ que está formada por unha constante, $k_1 = 8$, e o produto de dúas funcións $g_1(x) = x$ e $h_1(x) = ln\, x$. Polo tanto, para derivala usamos a fórmula $f_1'(x) = k_1 \cdot (g_1'(x) \cdot h_1(x) + g_1(x) \cdot h_1'(x))$.

$$f_1'(x) = 8 \cdot \left(1 \cdot ln\, x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = 8(ln\, x + 1)$$

Por outra banda, a función $f_2(x)$ formada por unha constante $k_2 = 5$ e a función $g_2(x) = e^x$ cuxa derivada é $f_2'(x) = k_2 \cdot g_2'(x) = 5 \cdot e^x$. Entón a derivada da función é:

$$y' = 8(ln\, x + 1) - 5e^x$$

c. $y = (3x^5 - 5x^2 + 7)^8$

Esta función é composición de $g(x) = 3x^5 - 5x^2 + 7$ con $f(x) = x^8$. Como a derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 8x^7$ e a de $g(x)$ é $g'(x) = 3 \cdot 5 \cdot x^4 - 5 \cdot 2 \cdot x = 15x^4 - 10x$, a súa derivada é:

$$y' = 8\big(g(x)\big)^7 \cdot g'(x) = 8(3x^5 - 5x^2 + 7)^7 \cdot (15x^4 - 10x)$$

d. $y = 7^{x+1} \cdot e^{4x^3-2x}$

Esta función é produto de $f(x) = 7^{x+1}$ e $g(x) = e^{4x^3-2x}$. Polo tanto, a súa derivada vén dada pola fórmula $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Imos calcular as respectivas derivadas::

$f(x) = 7^{x+1}$ é composición de $f_1(x) = x + 1$ con $f_2(x) = 7^x$, cuxas derivadas son $f_1'(x) = 1$ e $f_2'(x) = 7^x \cdot ln\, 7$. Así a súa derivada é:

$$f'(x) = f_2'\big(f_1(x)\big) \cdot f_1'(x) = 7^{x+1}\, ln\, 7 \cdot 1 = 7^{x+1}\, ln\, 7$$

$g(x) = e^{4x^3-2x}$ é composición de $g_1(x) = 4x^3 - 2x$ con $g_2(x) = e^x$, cuxas derivadas son $g_1'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 1 = 12x^2 - 2$ e $g_2'(x) = e^x$. Así, a derivada de g é:

$$g'(x) = g_2'\big(g_1(x)\big) \cdot g_1'(x) = e^{4x^3-2x} \cdot (12x^2 - 2)$$

Concluímos entón que a derivada da función é:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 7^{x+1} \ln 7 \cdot e^{4x^3-2x} + 7^{x+1} \cdot e^{4x^3-2x} \cdot (12x^2 - 2)$$

e. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

A función é cociente de $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = \sqrt{x} + 1$ *cuxas derivadas son* $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *e* $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$*. Entón a súa derivada é:*

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}+1\right) - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

f. $y = \tan(\ln x)$

Esta función é composición de $g(x) = \ln x$ *con* $f(x) = \tan x$*, cuxas derivadas son* $g'(x) = \frac{1}{x}$ *e* $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$*. Entón a súa derivada é:*

$$y' = \frac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{\cos^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cos^2(\ln x)}$$

g. $y = 7\cos^4(2x - 3)$

Esta función está formada por unha constante, $k = 7$*, e a composición de* $g(x) = 2x - 3$ *con* $f(x) = \cos^4 x$*. Á súa vez,* $f(x)$ *é composición de* $h(x) = \cos x$ *con* $i(x) = x^4$*, cuxas derivadas son* $h'(x) = -\sin x$ *e* $i'(x) = 4x^3$*. Entón a derivada de* f *é:*

$$f'(x) = i'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = 4(\cos x)^3 \cdot (-\sin x) = -4 \sin x \cos^3 x$$

Por outra banda, a derivada de g *é* $g'(x) = 2$*. Entón a derivada da función é:*

$$y' = 7 \cdot f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 7 \cdot (-4) \cdot \sin(2x-3) \cdot \cos^3(2x-3) \cdot 2 =$$

$$= -56 \sin(2x-3) \cos^3(2x-3)$$

h. $y = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

A función é composición de $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ *con* $f(x) = \arctan x$*.*

A función g *é cociente das funcións* $h(x) = x^2 - 1$ *e* $i(x) = x^2 + 1$*, cuxas derivadas son* $h'(x) = 2x$ *e* $i'(x) = 2x$*. Entón,*

$$g'(x) = \frac{h'(x) \cdot i(x) - h(x) \cdot i'(x)}{\big(i(x)\big)^2} = \frac{2x \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Así a derivada da función é:

$$y' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\cdot\frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{\frac{[(x^2+1)^2+(x^2-1)^2]\cdot(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}} =$$

$$= \frac{4x}{x^4+2x^2+1+x^4-2x^2+1} = \frac{4x}{2x^4+2} = \frac{2\cdot 2x}{2(x^4+1)} = \frac{2x}{x^4+1}$$

5. Acha a ecuación da recta tanxente á curva $y = 3x^2-8x+2$ no punto $x_0 = 2$.

   Sexa $f(x) = 3x^2-8x+2$.

   A ecuación da recta tanxente a f *en* $x=2$ *vén dada pola fórmula:* $y-f(2) = f'(2)\cdot(x-2)$.

   Temos que calcular $f'(2)$ *e* $f(2)$*:*

$$f'(x) = 3\cdot 2\cdot x - 8\cdot 1 = 6x-8 \rightarrow f'(2) = 2\cdot 6 - 8 = 4$$

$$f(2) = 3\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + 2 = -2$$

   Substituímos os valores e obtemos que a ecuación da recta tanxente é:

$$y-(-2) = 4\cdot(x-2) \rightarrow y = -2+4x-8 \rightarrow y = 4x-10$$

6. Estuda a monotonía e a curvatura da función $f(x) = x^3-6x^2+9x+4$. Clasifica os seus puntos singulares e obtén os seus puntos de inflexión (se os ten).

   Calculamos a derivada e igualámola a 0 para obter os puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 6\cdot 2x + 9\cdot 1 = 3x^2-12x+9$$

$$3x^2-12x+9 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2-4x+3 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = \begin{cases}3\\1\end{cases}$$

   Estudamos o signo da derivada nos intervalos determinados polos puntos singulares:

$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$f'(0) > 0$	$f'(2) < 0$	$f'(4) > 0$

1 3

   f *é crecente nos intervalos* $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ *e decrecente en* $(1,3)$*. Ten un máximo relativo en* $\big(1,f(1)\big) = (1,8)$ *e un mínimo relativo en* $\big(3,f(3)\big) = (3,4)$*.*

   Calculamos a derivada segunda e igualámola a 0 para obter os posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3\cdot 2\cdot x - 12\cdot 1 = 6x-12$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x-12 = 0 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$$

Estudamos o signo da segunda derivada nos intervalos determinados por $x = 2$.

$\cap$	$\cup$
$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$

2

f é cóncava en $(-\infty, 2)$ e convexa en $(2, \infty)$. Ten un punto de inflexión en $\big(2, f(2)\big) = (2{,}6)$.

7. Estuda e representa a gráfica da función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Dominio: $Dom\ f = \mathbb{R}$ por ser unha función polinómica.

Puntos de corte cos eixes:

- *Eixe OX* $(y = 0)$: $x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \to x(x^2 - 4x + 4) = 0 \to x(x-2)^2 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to (0{,}0) \\ x = 2 \to (2{,}0) \end{cases}$
- *Eixe OY* $(x = 0)$: $f(0) = 0 \to (0{,}0)$

Simetrías:

$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 4(-x) = -x^3 - 4x^2 - 4x \neq f(x) \to f$ *non é par.*

$-f(-x) = x^3 + 4x^2 + 4x \neq f(x) \to f$ *non é impar*

Monotonía e extremos relativos:

Calculamos a derivada e igualámola a 0 para obter os puntos singulares:

$$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} - 4 \cdot 2 \cdot x + 4 \cdot 1 = 3x^2 - 8x + 4$$

$$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 8x + 4 = 0 \to x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Estudamos o signo da derivada nos intervalos determinados polos puntos singulares:

$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$f'(0) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$

$2/3$ $\qquad$ 2

f é crecente nos intervalos $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ e decrecente en $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$. Ten un máximo relativo en $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$ e un mínimo relativo en $\big(2, f(2)\big) = (2{,}0)$.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{8}{3} = \frac{8 - 48 + 72}{27} = \frac{32}{27}$$

Curvatura e puntos de inflexión:

Calculamos a derivada segunda e igualámola a 0 para obter os posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3 \cdot 2 \cdot x - 8 \cdot 1 = 6x - 8$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 8 = 0 \rightarrow 6x = 8 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Estudamos o signo da segunda derivada nos intervalos determinados por $x = \frac{4}{3}$.

$\cap$	$\cup$
$f''(1) < 0$	$f''(2) > 0$

$4/3$

f *é cóncava en* $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ *e convexa en* $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$. *Ten un punto de inflexión en* $\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{27}\right)$.

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27} - \frac{64}{9} + \frac{16}{3} = \frac{64 - 192 + 144}{27} = \frac{16}{27}$$

Asíntotas: non ten por ser unha función polinómica. Ten ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Representación gráfica: