DERIVADAS. APLICACIÓN AO ESTUDO DUNHA FUNCIÓN

Resumo

- A taxa de variación media da función f no intervalo $[a,b]$ é $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- A derivada dunha función nun punto é a pendente da recta tanxente á gráfica da función nese punto. Calcúlase mediante o límite $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
  Cando este límite existe, dise que a función é derivable no punto.
- A ecuación da recta tanxente á gráfica dunha función f en $x=a$ calcúlase mediante a expresión $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ e a da recta normal $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$.
- Se unha función é derivable, entón é continua. Sen embargo, pode ser continua sen ser derivable.
- As derivadas laterais son os límites laterais da definición de derivada. Para que unha función sexa derivable, as derivadas laterais deben existir e ser iguais.
- A derivada dunha función obtense aplicando a definición de derivada nun punto xenérico x.
- A derivada pódese volver a derivar e obtense a derivada segunda, despois a terceira, e así sucesivamente.
- Derivada dalgunhas funcións elementais:
  - $y=k\to y'=0$
  - $y=x^n\to y'=nx^{n-1}$
  - $y=e^x\to y'=e^x$
  - $y=a^x\to y'=a^x\cdot\ln a$
  - $y=\ln x\to y'=\frac{1}{x}$
  - $y=\log_a x\to y'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$
  - $y=\sin x\to y'=\cos x$
  - $y=\cos x\to y'=-\sin x$
  - $y=\tan x\to y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
  - $y=\arcsin x\to y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $y=\arccos x\to y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $y=\arctan x\to y'=\frac{1}{1+x^2}$
- Regras de derivación:
  - Derivada dunha constante por unha función: $y=k\cdot f(x)\to y'=k\cdot f'(x)$
  - Derivada dunha suma ou diferenza de funcións: $y=f(x)\pm g(x)\to y'=f'(x)\pm g'(x)$
  - Derivada dun produto: $y=f(x)\cdot g(x)\to y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
  - Derivada dun cociente: $y=\frac{f(x)}{g(x)}\to y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
  - Regra da cadea: $y=f\big(g(x)\big)\to y'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$
- Unha función f é crecente se para calquera a e b, tales que $a<b$ verifícase que $f(a)<f(b)$ e decrecente se para calquera a e b, tales que $a<b$ verifícase que $f(a)>f(b)$.
- Unha función é monótona se é crecente ou decrecente en todo o seu dominio.
- Se f é unha función derivable nos puntos do intervalo aberto (a,b):
  - Se $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$, entón f é crecente en (a,b).
  - Se $f'(x)<0$ para todo $x\in(a,b)$, entón f é decrecente en (a,b).
- Unha función f ten en x_0 un máximo relativo se existe un intervalo (a,b) que contén a x_0, tal que para todo $x\in(a,b)$ verifícase $f(x_0)\geq f(x)$. E ten en x_0 un mínimo relativo se existe un intervalo (a,b) que contén a x_0, tal que para todo $x\in(a,b)$ verifícase $f(x_0)\leq f(x)$.
- Unha función f ten en x_0 un máximo absoluto se $f(x_0)\geq f(x)$ para todo x do dominio da función. E ten en x_0 un mínimo absoluto se $f(x_0)\leq f(x)$ para todo x do dominio da función.

- Se f é derivable nos puntos do intervalo aberto (a, b), se f alcanza un máximo ou mínimo relativo en $x_0 \in (a, b)$, entón $f'(x_0) = 0$. A estes puntos chámaselles puntos críticos.
- Se f é unha función cun punto crítico en $x = a$, tal que $f'(a) = 0$:
  - Se $f''(a) > 0$, entón f ten en $x = a$ un mínimo, con coordenadas $(a, f(a))$.
  - Se $f''(a) < 0$, entón f ten en $x = a$ un máximo, con coordenadas $(a, f(a))$.
- Unha función é convexa cando calquera corda que una dous puntos da súa gráfica sempre queda por enriba da gráfica e cóncava cando a corda queda sempre por debaixo da gráfica.
- Un punto de inflexión é un punto da gráfica da función na que hai un cambio de curvatura, de cóncava a convexa, ou de convexa a cóncava.
- Se f é unha función cuxa derivada segunda existe nun intervalo (a, b):
  - Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entón f é cóncava en (a, b).
  - Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entón f é convexa en (a, b).
- Se f ten en x_0 un punto de inflexión, e existe a derivada segunda, entón $f''(x_0) = 0$.
- Pasos para o estudo da gráfica dunha función:
  - Propiedades globais da función: dominio, puntos de corte, simetrías e periodicidade.
  - Derivada primeira: puntos críticos, intervalos de crecemento e decrecemento.
  - Derivada segunda: intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión.
  - Asíntotas: verticais, horizontais e oblicuas.
  - Representación gráfica.