NÚMEROS REAIS

1. Números racionais. Número irracionais

1.1 Os números racionais

Os números naturais serven para contar e ordenar os elementos dun conxunto. Hai infinitos. Este conxunto denótase pola letra $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N}=\{\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\ldots.\}$$

Os números naturais pódese sumar e multiplicar sen ningún problema e o facelo danos outro número natural. No obstante, non se poden restar sempre, ten sentido $5-3$ pero non $3-5$. Para que esta operación teña sentido necesitamos ampliar o conxunto dos números naturais

Os números enteiros están formados polo conxunto dos números naturais e os seus opostos, os números negativos, este conxunto denótase cá letra $\mathbb{Z}$. Con eles completamos a tarefa de contar e ordenar números negativos.

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-\mathbf{4},-\mathbf{3},-\mathbf{2},-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\ldots.\}$$

Os números enteiros pódense sumar, restar, multiplicar, pero soamente teñen sentido as divisións exactas, por exemplo con estes números non se poden expresar a terceira parte, a cuarta parte de calquera número enteiro. Para que en xeral todas as divisións entre números enteiros(salvo a división entre 0) teñan sentido introdúcese o conxunto dos números racionais.

Os números racionais, que se denotan $\mathbb{Q}$, caracterízanse porque poden expresarse en forma de fracción, e dicir, coma cociente de dous números enteiros.

$$\boldsymbol{x \epsilon\ \mathbb{Q} \Leftrightarrow existe\ a\ , b\ \epsilon\ Z, tales\ que\ x = \frac{a}{b}\ con\ b \neq 0}$$

Os números racionais tamén se caracterizan pola súa forma decimal: ou ben son enteiros ou ben teñen unha expresión decimal finita ou periódica.

Pola construción dos números verificase: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

<u>Exemplo</u>
Clasifica os seguintes números:

$\frac{10}{2} = 5$ natural, enteiro e racional

$\frac{-5}{2} = -2{,}5$ decimal exacto, racional

$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 0,\widehat{3}$ decimal periódico, racional

$\frac{17}{12} = 1{,}416666\ldots = 1{,}41\widehat{6}$ decimal periódico mixto, racional

1.2 Números irracionais

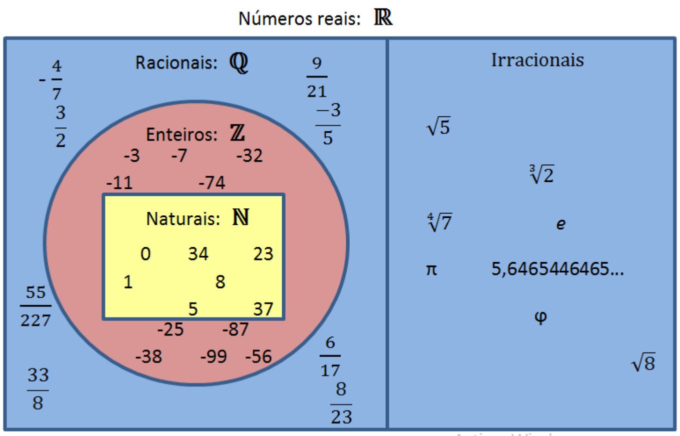
Hai números non racionais, é dicir, que non se poden expresar como cociente de dous números enteiros, a este números chámanselles irracionais e o conxunto de todos eles denótase $\mathbb{I}$. A súas expresións decimais non son nin exactas nin periódicas, exprésanse mediante infinitas cifras decimais.

Algúns exemplos de números irracionais son:

- Números alxébricos: os radicais que se obteñen como raíces de ecuacións, por exemplo: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \ldots$
- O número pi, $\pi = 3{,}141592\ldots$, cociente da lonxitude dunha circunferencia e o seu diámetro.
- O número áureo, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339\ldots.$, relación entre a diagonal e o lado dun pentágono regular.
- O número e, e=2,7182818…, aparece en moitos procesos de crecemento.

2. Os números reais. A recta real

O conxunto dos números reais está formado polos números racionais e os irracionais. Represéntanse cá letra $\mathbb{R}$. No seguinte debuxo podemos visualizar a construción dos números reais.

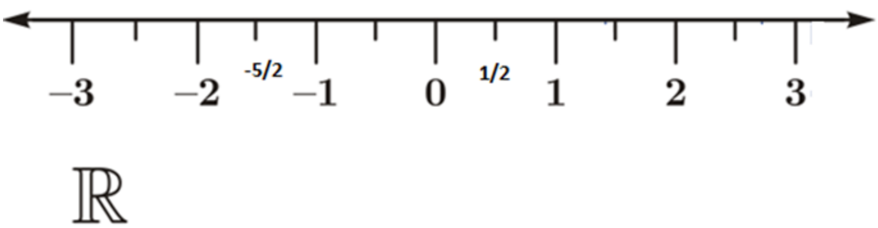


$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ilustración 1. Táboa dos Nº Reais

Chámase recta real a unha recta onde representaremos todos os números reais. A cada número lle corresponde un punto da recta e cada punto da recta lle corresponde un número real; polo que se di que os números reais completan a recta.

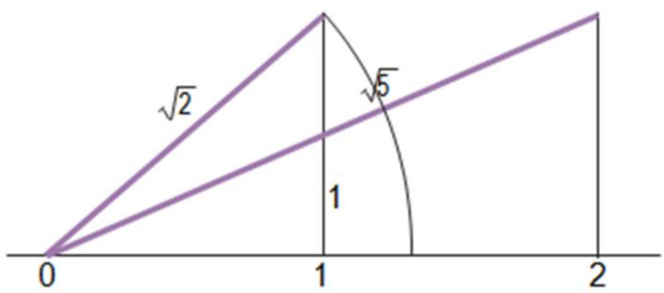


A representación dos números racionais na recta xa se traballou nos cursos inferiores, recordar que os números positivos van a dereita do cero e os negativos a esquerda do cero. A representación dun número irracional, coma pode ser $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\ldots$, podémola facer de forma aproximada pola súa expresión decimal ou ben de forma exacta, a cal se complica un pouco máis coma podemos ver no exemplo seguinte.

Exemplo

Representación gráfica de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$

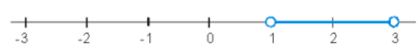
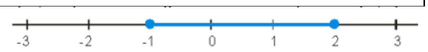
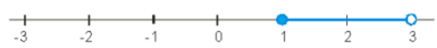
Podemos utilizar o teorema de Pitágoras, para elo construímos un triángulo rectángulo de catetos 1, polo teorema de Pitágoras a súa hipotenusa é $\sqrt{2}$, xa que $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$. Coa axuda dun compás representaremos de forma exacta o valor $\sqrt{2}$.
De forma análoga se construímos un triángulo de catetos 1 e 2 a súa hipotenusa é $\sqrt{5}$ xa que $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$.

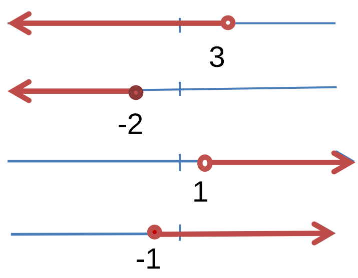


2.1 Intervalos

Para describir conxuntos de números reais, resulta útil ás veces expresalos como anacos ou segmentos da recta. A estes anacos chámanselles intervalos, e existen diferentes tipos que resumen na seguinte táboa.

Sexan a e b dous números reais tales que $a < b$ vexamos os diferentes tipos de intervalos:

Intervalo	Exemplo	Representación
Intervalo aberto $(a,b)=\{x \in \mathbb{R}\ ; a<x<b\}$	$(2,5)=\{x \in \mathbb{R}\ ; 1<x<3\}$	
Intervalo pechado $[a,b]=\{x \in \mathbb{R}\ ; a \leq x \leq b\}$	$[2,5]=\{x \in \mathbb{R}\ ; -1 \leq x \leq 2\}$	
Intervalos semiabertos ou semipechados $(a,b]=\{x \in \mathbb{R}\ ; a<x\leq b\}$ $[a,b)=\{x \in \mathbb{R}\ ; a\leq x<b\}$	$(-1,2]=\{x \in \mathbb{R}\ ; -1<x \leq 2\}$ $[1,3)=\{x \in \mathbb{R}\ ; 1\leq x<3\}$	 

Intervalos de lonxitude infinita ou Semirrectas		
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}\,; x < b\,\}$	$(-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R}\,; x < 3\,\}$	
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}\,; x \leq b\,\}$	$(-\infty, -2] = \{x \in \mathbb{R}\,; x \leq -2\,\}$	
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\,; x > a\,\}$	$(1, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\,; x > 1\,\}$	
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\,; x \geq a\,\}$	$[-1, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\,; x \geq -1\,\}$	

∞ é o símbolo que se utiliza para representar a idea de infinito e non é un número que se atope na recta, por iso non se inclúe nunca nos intervalos. A propia recta real pódese expresar como o intervalo (–∞,+∞). Cando se quere nomear un conxunto de puntos formado por dous ou máis destes intervalos, utilízase o signo ∪ (unión) entre eles.

Recorda:

O valor absoluto dun número é o mesmo número se é positivo, e o oposto se é negativo. Pódese definir, dunha forma máis precisa, $|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{se\ a} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{a} & \boldsymbol{se\ a} < \boldsymbol{0} \end{cases}$

Pódese dicir que o valor absoluto representa a distancia de calquera número ao cero. Un dos usos do valor absoluto e para representar intervalos, coma por exemplo: $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\,; |\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{2}\} = [-\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2}]$

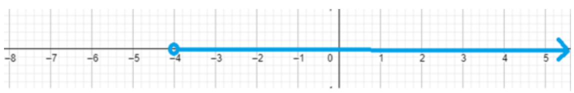
Exemplo

Representa os seguinte conxuntos numéricos de todas as formas posibles:

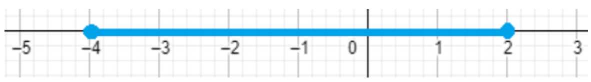
a) Os números maiores ou iguais a -4.
b) $\{\mathrm{x}\,/\ -4 \leq \mathrm{x} \leq 2\}$
c) $\{\mathrm{x}\,/|\mathrm{x}| \leq 5\}$
d) $\{x/x \leq 2\}$

Solución:

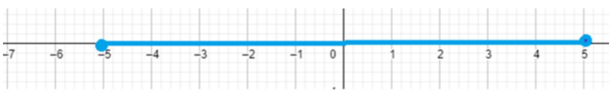
a) Intervalo $(-4, \infty)$, graficamente:



b) Intervalo $[-4, 2]$, graficamente:



c) Intervalo $[-5,5]$, graficamente:



d) Intervalo $(-\infty. 2]$,graficamente:

3. Radicais e operacións

Como xa vimos anteriormente unha forma simbólica de manexar os números reais é mediante radicais, vexamos a continuación que son os radicais e cómo se opera con eles.

A raíz n-ésima de a e outro número b, tal b elevado a n danos a, isto é:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a}$$

Ao símbolo $\sqrt[n]{a}$ chámaselle radical, ao número n chámaselle índice da raíz e a o número a radicando.

A raíz e a operación inversa das potencias, vexamos cun exemplo o cálculo de raíces:

$$\sqrt[3]{125} = 5 \;\; xa\;que\; 5^3 = 125$$

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3 \;\; xa\;que \begin{cases} 3^4 = 81 \\ (-3)^4 = 81 \end{cases}$$

$\sqrt[4]{-16} = \nexists$ xa que non temos ningún número que si o elevamos a cuarta de negativo.

Polo tanto podemos concluír:

- Se a≥0 $\sqrt[n]{a}$ existe se n é par ten dúas solucións se n é impar ten unha solución.2112
- Se a<0, $\sqrt[n]{a}$ soamente existe para valores impares da n.

Como consecuencia da definición de raíz n-ésima podemos expresar o radical $\sqrt[n]{a}$ coma unha potencia de exponente racional

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = (a)^{\frac{1}{n}} \;, \qquad xa\;que \qquad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = (a)^{\frac{n}{n}} = a}$$

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \;, \qquad xa\;que \qquad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n} = (a)^{\frac{m \cdot n}{n}} = a^m}$$

Polo anterior, as operacións con radicais son iguais que as operacións coas potencias de expoñente fraccionario.

Dicimos que dous radicais son equivalentes cando o expresalos en forma de potencias con expoñentes fraccionarios, as súas bases son iguais e as fraccións dos seus expoñentes son equivalentes.

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m}\text{ é } equivalente\; a\; \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}\; xa\; que\; te\tilde{n}en\; o\; mesmo\; radicando\; e\; \frac{n}{m} = \frac{n\cdot p}{m\cdot p}}$$

A equivalencia dos radicais permiten:

- Simplificar radicais: consiste en extraer da raíz todos os factores posibles.
- Reducir radicais ao mesmo índice: consiste en encontrar outros radicais equivalentes que teñan o mesmo índice.

Exemplo 1

Simplifica todo o posible $\sqrt[6]{25}$, $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[6]{a^4}$

1º Expresamos coma potencia fraccionaria, para o cal descompoñemos o radicando.

2º Calculamos a fracción irredutible se non se pode simplificar e temos unha fracción impropia(numerador maior que o denominador) debemos extraer factores.

3º Pasamos de novo a radical.

$$\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

Exemplo 2

Simplifica todo o posible $\sqrt[4]{64}$, $\sqrt[4]{162}$, $\sqrt[5]{64}$

Cá practica podemos eliminar algún dos pasos.

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[2]{2^3} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = 3\sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$$

Exemplo 3

Reduce os seguintes radicais o mesmo índice $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{3}$

1º Pasamos os radicais a potencias con expoñentes fraccionarios

2º Reducimos a común denominador e expresamos de novo coma radicais.

$2^{\frac{1}{5}}, 5^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{2}}$ m.c.m(5,3,2)=30 polo tanto $2^{\frac{6}{30}}$, $5^{10/30}$, $3^{15/30}$ e os novos radicandos son:

$$\sqrt[30]{2^6},\ \sqrt[30]{5^{10}},\ \sqrt[30]{3^{15}}$$

3.1 Operacións cos radicais

Suma e resta de radicais

Para sumar radicais é preciso que teñan o mesmo índice e idéntico radicando, doutro modo non se poderán sumar. Moitas das veces deberemos simplificar previamente o radicando.

Exemplo 1

$$\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

Exemplo 2

$$4\sqrt[5]{2} - 3\sqrt[5]{2} + 4\sqrt[15]{2^3} = 4\sqrt[5]{2} - 3\sqrt[5]{2} + 4\sqrt[5]{2} = 5\sqrt[5]{2}$$

Exemplo 3

$$\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45} = 2\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = -7\sqrt{5}$$

Produto e cociente de radicais

Para multiplicar ou dividir radicais deberán ter o mesmo índice. Se non o teñen os transformamos noutros equivalentes: $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}$ $\qquad \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} : \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$

Exemplo 1

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{500} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{125} = 5$$

Exemplo 2

$$\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{50}}{\sqrt[6]{20}} = \frac{\sqrt[6]{8^3}\sqrt[6]{50^2}}{\sqrt[6]{20}} = \sqrt[6]{\frac{2^9 \cdot (5^2 \cdot 2)^2}{2^2 \cdot 5}} = \sqrt[6]{2^9 \cdot 5^3} = \sqrt[6]{(2^3 \cdot 5)^3} = \sqrt{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt{10}$$

Potencias e raíces de radicais

Transformamos os radicais en potencias e aplicamos as propiedades das potencias.

Exemplo

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6 = \left(a^{2/3}\right)^6 = a^{12/3} = a^4$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^4}} = \left(\sqrt[3]{a^4}\right)^{1/2} = a^{4/6} = a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$$

Racionalización

O proceso de eliminar as raíces do denominador chámase racionalización, e consiste en transformar as fraccións noutras equivalentes con denominador natural. Distinguiremos dous casos.

Caso 1:

Fraccións do tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$

Para eliminar este radical do denominador, multiplícase o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{b^{n-1}}$

Exemplos

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\sqrt[5]{2^2}}{2} = \sqrt[5]{2^2}$$

Caso 2:

Fraccións con sumas e restas de radicais no denominador

Para eliminar estes radicandos multiplicamos numerador e denominador polo conxugado do denominador.

Recorda: O conxugado de (a –b) é (a+b), reciprocamente o de (a+b) é (a–b), úsase o conxugado porque se nos fixamos no produto resultante é unha identidade notable onde as raíces ao estar elevadas ao cadrado desaparecen $(a-b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemplos

$$\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{-1} = -3\sqrt{2}-3\sqrt{3}$$

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} = \frac{7\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)\cdot(\sqrt{5}+2)} = \frac{7\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}^2-2^2} = \frac{7\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+2)}{1} = 7\cdot 5 + 14\sqrt{5} = 35 + 14\sqrt{5}$$

4. Logaritmos e propiedades

Dados dous nº reais positivos a e b (a≠1) o logaritmo en base a de b é o expoñente o que temos que elevar a para que nos de b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Exemplos

$\log_2 8 = 3 \; xa \; que \; 2^3 = 8$

$\log_3 81 = 4 \; xa \; que \; 3^4 = 81$

$\log_4 {}^1/_{16} = -2 \; xa \; que \; 4^{-2} = \frac{1}{16}$

Segundo a base dos logaritmos:

- Falamos de logaritmos decimais cando a base é 10, isto é a=10, e ademais non é preciso escribir a base.
  log100=2 log1000=3 log0,1=-1

- Falamos de logaritmos neperianos cando a base é o número e=2,7182…, isto é a=e, estes denótanse coma $\ln b$.

Cá calculadora podemos obter o resultado de logaritmos, tanto logaritmos decimais, cá tecla log coma logaritmos neperianos ca tecla ln. Aínda que nas calculadoras máis actuais tamén temos unha tecla para o cálculo de calquera logaritmo independente da súa base.

Propiedades de los logaritmos

1. O logaritmo de 1 é sempre 0, e o logaritmo da base sempre é 1.
   $$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$
2. O logaritmo dun produto é a suma dos logaritmos dos factores.
   $$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$
3. O logaritmo dun cociente é o logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador.
   $$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$
4. O logaritmo dunha potencia é igual ao expoñente multiplicado polo logaritmo da base da potencia.
   $$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

5. Cambio de base dos logaritmos: Cando os logaritmos son decimais ou neperianos, pode utilizarse a calculadora, cando o logaritmo ten outra base, e a nosa calculadora non ten outro tipo de logaritmos, utilízase a seguinte fórmula para realizalos cálculos.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplo 1

Calcula os seguintes logaritmos sen uso da calculadora cá axuda da definición e propiedades:

$$\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$$

$$\log 0{,}001 = \log\frac{1}{1000} = log10^{-3} = -3$$

$$ln\frac{1}{\sqrt{e}} = lne^{-1/2} = -\frac{1}{2}$$

$$log2{,}5 + log40 = log(2{,}5 \cdot 40) = log100 = log10^2 = 2$$

Exemplo 2

Expresa o valor de A en forma alxébrica: $lnA = lnx + 4lnx - 3lnx$

$$lnA = lnx + lnx^4 - lnx^3$$
$$lnA = ln\frac{x \cdot x^4}{x^3}$$
$$lnA = lnx^2$$
$$A = x^2$$

5. Aproximacións e erros

É evidente que cun número que teña infinitas cifras decimais non é doado traballar, coma por exemplo: π=3,1415926…,√3=1,7320508…. Nestes caso non se pode traballar co número exacto, se non que se traballa cunha aproximación. As cifras significativas son o número de cifras que se utilizan para describir unha magnitude ou un valor numérico. Estas dependen da situación que se queira describir e da precisión das medidas que se dispoñan. Por exemplo, dise que unha persoa mide 1,65 utilizando 3 cifras significativas.

Os números pódense aproximar mediante truncado ou redondeo.

- Truncar: Consiste en eliminar as cifras decimais dun número a partir dunha determinada cifra. Por exemplo 34,2456789 truncado a partir das cinco primeiras cifras significativas é 34,245.

- Redondear: Consiste en eliminar as cifras decimais a partir dunha determinada tendo en conta que, se a primeira cifra que eliminamos é 0,1,2,3 ou 4 a anterior queda coma está, se é 5,6,7,8 ou 9 aumenta nunha unidade. Por exemplo 34,2456789 redondeado a partir das cinco primeiras cifras significativas é 34,246.

Ao utilizar o valor aproximado en lugar do valor real cométese un erro, pódese falar de dous tipos o Erro Absoluto e o Erro Relativo. Que se calculan cás seguintes fórmulas:

Erro Absoluto: $\boldsymbol{E_a = |V_{real} - V_{aproximado}|}$

Erro Relativo: $\boldsymbol{E_r = \left|\frac{E_a}{V_{real}}\right|}$

Exemplo 1

Aproxima $3{,}258$; $2,\widehat{21}$ e $\sqrt{7}$ ás centésimas.

	3,258	$2,\widehat{21}$	$\sqrt{7}$=2,6457...
Redondeo ás centésimas	*3,26*	*2,21*	2,65
Truncado ás centésimas	*3,25*	*2,21*	2,64

Exemplo 2

Calcula o error absoluto e relativo do número $\sqrt{3}$ ao facer o redondeo a tres cifras significativas.

$\sqrt{3} = 1{,}73025 \ldots \approx 1{,}73$

Error absoluto= $|\sqrt{3} - 1{,}73| = 0{,}00205 \ldots$

Error relativo=$\left|\frac{0{,}00205\ldots}{1{,}73205\ldots}\right| = 0{,}00118$

Exemplo 3

Calcula o erro absoluto e relativo que cometemos se substituímos $\frac{2}{3}$ por 0,66.

Error absoluto=$\left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{66}{100}\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \left|\frac{1}{150}\right| = \frac{1}{150}$

Error relativo=$\left|\frac{1/150}{2/3}\right| = \frac{1}{100} \approx 1\%$

Licenzas das ilustracións

Ilustración	Recurso
Ilustración 1. Táboa dos nº Reais	Autoría: Propia