

POLINOMIOS E ECUACIÓNS

Exercicios autoavaliabes

1. Realiza as seguintes operacións cos polinomios:

$$p(x) = 12x^4 - 6x^3 + 8x - 7 \quad d(x) = 2x^2 - 3x + 4 \quad c(x) = x + 1$$

- a) $p(x) - d(x)$
- b) $p(x) \cdot c(x)$

2. Realiza por Ruffini as seguintes divisións:

- a) $D(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 5 \quad d(x) = x + 3$
- b) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 2 \quad d(x) = x + 3$

3. Comproba sen facer a división que $D(x) = 3x^3 - 9x^2 - 48$ é divisible por $d(x) = x - 4$

4. Opera e simplifica:

- a) $\frac{3x+1}{x^2-4} - \frac{5}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} =$
- b) $\frac{x-2}{2x+6} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-9} =$
- c) $\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x^2}\right) =$
- d) $\left(2 + \frac{x-2y}{x+y}\right) \left(2 - \frac{2x-y}{x+y}\right) =$

5. Dado o polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

- a) Calcula a descomposición factorial
- b) Calcula as súas raíces.

6. Calcula o valor de K para que o resto da división seguinte sexa -3.

$$(x^4 + kx^2 - 2x + 5) : (x - 2)$$

7. Calcula o valor de K para que o polinomio $P(x) = x^4 + 2x^2 + kx - 25$ sexa divisible polo binomio $(x + 3)$

8. Resolve as seguintes ecuacións:

- a) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$
- b) $\frac{x^2+16}{x^2-4} = \frac{x}{x-2} - \frac{x+7}{x+2}$
- c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1$
- d) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$
- e) $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$
- f) $x(4x+1)(2x-7)(x^2-4) = 0$
- g) $4(5x+1)^2 - 9 = 0$

9. Escribe un polinomio de grao catro que cumpra, en cada caso, as seguintes condicións:

- a) Non teña raíces
- b) Teña soamente dúas raíces 2 e 3.

10. O lado desigual dun triángulo isósceles mide 8cm e a altura sobre dito lado mide 1cm menos co outro dos lados do triángulo. Calcula a lonxitude de cada lado.

11. Nunha zona turística reproducense moitos mosquitos. Os mosquitos reproducense un 10% cada semana, se fumigamos cando se duplica a poboación de mosquitos. Cantas semana teremos que fumigar?

12. Pepe reparte entre os seus netos a súa colección de reloxos. Ao maior dálle a metade máis tres, ao mediano a terceira parte do que lle queda e o resto, 26 reloxos, ao menor. Calcula o número de reloxos que ten Pepe.

Solucións

1. Realiza as seguintes operacións cos polinomios:

$$p(x) = 12x^4 - 6x^3 + 8x - 7 \quad d(x) = 2x^2 - 3x + 4 \quad c(x) = x + 1$$

a) $p(x) - d(x)$

b) $p(x) \cdot c(x)$

a) *Para restar cambiamos os signo e logo agrupamos os termos semellantes:*

$$p(x) - d(x) = 12x^4 - 6x^3 + 8x - 7 - (2x^2 - 3x + 4) = 12x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 11x - 11$$

b) *Para multiplicar polinomios debemos multiplicar todos os termos por todo e logo agrupar os termos semellantes:*

$$p(x) \cdot d(x) = (12x^4 - 6x^3 + 8x - 7) \cdot (x + 1) = 12x^5 - 6x^4 + 8x^2 - 7x + 12x^4 - 6x^3 + 8x - 7 = 12x^5 + 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + x - 7$$

2. Realiza por Ruffini as seguintes divisións:

a) $D(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 5 \quad d(x) = x + 3$

b) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 2 \quad d(x) = x + 3$

a) *Recordar que para aplicar a regra de Ruffini debemos poñer soamente os coeficientes ordenados e un cero nos termos que non teñamos.*

	1	0	-3	4	-5
-3		-3	9	-18	42
	1	-3	6	-14	37

Resto = 37 Cociente $C(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 14$

b)

	1	4	0	-7	2
-3		-3	-3	9	-6
	1	1	-3	2	-4

Resto = -4 Cociente $C(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$

3. Comproba sen facer a división que $D(x) = 3x^3 - 9x^2 - 48$ é divisible por $d(x) = x - 4$.

Aplicamos o teorema do factor Resto $\Rightarrow P(4) = 3 \cdot 4^3 - 9 \cdot 4^2 - 48 = 0$ Coma o resto é cero é divisible.

4. Opera e simplifica:

- a) $\frac{3x+1}{x^2-4} - \frac{5}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} =$
 b) $\frac{x-2}{2x+6} : \frac{x^2-4}{x^2-9} =$
 c) $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x^2}\right) =$
 d) $\left(2 + \frac{x-2y}{x+y}\right) : \left(2 - \frac{2x-y}{x+y}\right) =$

a) Debemos facer o m. c. m $\frac{3x+1}{x^2-4} - \frac{5}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{3x+1}{x^2-4} - \frac{5(x-2)}{x^2-4} + \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-4} =$
 $= \frac{3x+1-5x+10+x^2+2x-3x-6}{x^2-4} = \frac{x^2-3x+5}{x^2-4}$

b) Multiplicamo en cruz $\frac{x-2}{2x+6} : \frac{x^2-4}{x^2-9} = \frac{(x-2)(x^2-9)}{(2x+6)(x^2-4)} = \frac{(x-2)(x+3)(x-3)}{2(x+3)(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{2(x+2)}$

c) Se nos fixamos é unha identidade notable $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 - \frac{1}{x^4} = \frac{x^6-1}{x^4}$

d) Facemos cada parentese por separado e logo a división

$$\left(2 + \frac{x-2y}{x+y}\right) : \left(2 - \frac{2x-y}{x+y}\right) = \left(\frac{2x+2y+x-2y}{x+y}\right) : \left(\frac{2x+2y-2x+y}{x+y}\right) = \frac{3x}{x+y} : \frac{3y}{x+y} = \frac{x}{y}$$

5. Dado o polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

- a) Calcula a descomposición factorial
 b) Calcula as súas raíces.

a) Divisores do termo independente $=\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ temos que ir probando por Ruffini e coller as que o resto sexa nulo.

	1	1	-8	-12
-2		-2	2	12
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	0		

$$P(x) = (x+2)(x+2)(x-3) = (x+2)^2(x-3)$$

b) As raíces son o -2 dobre e 3.

6. Calcula o valor de K para que o resto da división seguinte sexa -3.

$$(x^4 + kx^2 - 2x + 5) : (x - 2)$$

Aplicamos o teorema do resto e tense que verificar $P(2) = -3$, o valor numérico deberá coincidir co resto.

$$2^4 + k \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 5 = -3 \Rightarrow 8k = -20 \Rightarrow k = -5/2$$

7. Calcula o valor de K para que o polinomio $P(x) = x^4 + 2x^2 + kx - 25$ sexa divisible polo binomio $(x + 3)$

Aplicamos o teorema do resto, neste caso para que sexa divisible, o valor numérico deberá ser cero, $P(-3) = 0$.

$$P(-3) = (-3)^2 + 2(-3)^3 + k(-3) - 25 = 9 - 54 - 3k - 25 = -2 - 3k \Rightarrow -2 - 3k = 0 \Rightarrow k = -2/3$$

8. Resolve as seguintes ecuacións:

- a) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$
- b) $\frac{x^2+16}{x^2-4} = \frac{x}{x-2} - \frac{x+7}{x+2}$
- c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1$
- d) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$
- e) $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$
- f) $x(4x+1)(2x-7)(x^2-4) = 0$
- g) $4(5x+1)^2 - 9 = 0$

a) Ecuación bicadrática:

$x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ Cambio de variable $t = x^2 \Rightarrow t^2 - 9t + 20 = 0$ resolvemos aplicando a fórmula da ecuación de segundo grao completa e obtemos: $t = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$

$$\begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = 4 \end{cases} \text{ desfacemos o cambio de variable } \begin{cases} x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

b) Ecuación racional $\frac{x^2+16}{x^2-4} = \frac{x}{x-2} - \frac{x+7}{x+2}$

Facemos o m.c.m. $(x^2 - 4, x - 2, x + 2) = x^2 - 4$

$$\frac{x^2 + 16}{x^2 - 4} = \frac{x(x+2)}{x^2 - 4} - \frac{(x+7)(x-2)}{x^2 - 4}$$

$$x^2 + 16 = x^2 + 2x - x^2 + 2x - 7x + 14$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ resolvemos pola fórmula } x = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Comprobamos $x = -2$ non é válida xa que anula un denominador, solución $x = -1$

c) Ecuación radical $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1$ Deixamos unha raíz nun membro.

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + 1 \text{ elevamos o cadrado } \sqrt{x+1}^2 = (\sqrt{x-2} + 1)^2 \text{ Identities notable!}$$

$$x+1 = x-2 + 2\sqrt{x-2} + 1 \text{ Agrupamos}$$

$$2 = 2\sqrt{x-2}$$

$$1 = \sqrt{x-2} \text{ volvemos elevar ao cadrado, xa que aínda temos unha raíz}$$

$$1 = x-2 \Rightarrow x = 3 \text{ comprobamos se verifica a ecuación, } \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1, \text{ certo!}$$

Solución $x=3$

d) Ecuación exponencial $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \text{ cambio de variable } 3^x = t$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0 \text{ resolvemos pola fórmula da ecuación de segundo grao } t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$t = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases} \text{ desfacemos o cambio}$$

$$3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \text{ e } 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

e) Ecuación logarítmica $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$ aplicamos as propiedades, suma de logaritmos é logaritmo dun produto:

$$\log(x+2) + \log(x-1) = \log 10$$

$$\log(x+2)(x-1) = \log 10 \text{ Eliminamos os logaritmos}$$

$$(x+2)(x-1) = 10$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad x = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases} \text{ Ecuación de 2º grao completa.}$$

Comprobamos $x=3$ é solución e $x=-4$ non (non existen logaritmos negativos)

$$f) x(4x+1)(2x-7)(x^2-4) = 0$$

Ecuación de grao maior a tres, deberíamos factorizar, xa está así que debemos igualar cada factor a cero:

$$x = 0$$

$$4x+1 = 0 \Rightarrow x = -1/4$$

$$2x-7 = 0 \Rightarrow x = 7/2$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \text{Ecuación de 2º grao incompleta } x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

g) $4(5x+1)^2 - 9 = 0$ Debemos de eliminar ese paréntese, aplicando identidades notables

$$4(25x^2 + 10x + 1) - 9 = 0 \Rightarrow 100x^2 + 40x + 4 - 9 = 0 \Rightarrow 100x^2 + 40x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 + 2000}}{200} = \frac{-40 \pm 60}{200} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}; x = 1/10$$

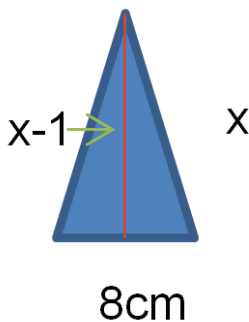
9. Escribe un polinomio de grao catro que cumpra, en cada caso, as seguintes condicións:

- a) Non teña raíces
- b) Teña soamente dúas raíces 2 e 3.

a) $x^4 + 1$, como as posibles raíces neste caso son ± 1 , ao calcular o valor numérico nunca nos vai a dar cero, porque é a suma de dous números positivos.

b) $(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1) \Rightarrow x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$

10. O lado desigual dun triángulo isósceles mide 8cm e a altura sobre dito lado mide 1cm menos co outro dos lados do triángulo. Calcula a lonxitude de cada lado.



Facemos un debuxo para situarnos

Aplicamos Pitágoras no triángulo rectángulo formado pola altura;

$$x^2 = 4^2 + (x - 1)^2 \Rightarrow x^2 = 16 + x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9cm$$

Os outros dous lados miden 9cm.

11. Nunha zona turística reproducense moitos mosquitos. Os mosquitos reproducense un 10% cada semana, se fumigamos cando se duplica a poboación de mosquitos. Cantas semana teremos que fumigar?

Chamamos m os mosquitos iniciais; Fumígase cando a poboación sexa 2m e se reproducen 10% por semana, escribimos a seguinte ecuación:

$$2m = m \cdot 1,1^t \Rightarrow 2 = 1,1^t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,1} = 7,27$$

Fumigaremos cada 7 semanas

12. Pepe reparte entre os seus netos a súa colección de reloxos. Ao maior dálle a metade máis tres, ao mediano a terceira parte do que lle queda e o resto, 26 reloxos, ao menor. Calcula o número de reloxos que ten Pepe.

Chamemos $x =$ número de reloxos de Pepe

Neto maior: $\frac{x}{2} + 3$

Neto mediano: $\frac{1}{3} \left[x - \left(\frac{x}{2} + 3 \right) \right]$

Neto pequeno 26

$$\frac{x}{2} + 3 + \frac{1}{3} \left[x - \left(\frac{x}{2} + 3 \right) \right] + 26 = x$$



$$\frac{x}{2} + 3 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x+6}{2} \right) + 26 = x$$

$$\frac{x}{2} + 3 + \frac{x}{3} - \frac{x+6}{6} + 26 = x$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{18}{6} + \frac{2x}{6} - \frac{x+6}{6} + \frac{156}{6} = \frac{6x}{6}$$

$$3x + 2x - x - 6x = -18 - 156 + 6$$

$$-6x = -168$$

$$x = 84 \text{ reloxos}$$