

## POLINOMIOS E ECUACIÓNS

### Exercicios autoavaliabes

1. Calcula o valor de  $m$  para que a seguinte división sexa exacta:

$$(x^4 + 3x^3 + mx - 3) : (x + 3)$$

2. O resto da división  $(-x^3 + 3x^2 + kx + 7) : (x + 2)$  é 7. Cal é o valor de  $K$ ?

3. Calcula por Ruffini:

$$a) (x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2) =$$

$$b) (x^4 - 81) : (x + 3) =$$

4. Calcula as raíces enteiras e a descomposición factorial dos seguintes polinomios:

$$a) P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$$

$$b) r(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$$

5. Calcula o resto das seguintes divisións:

$$a) (x^{500} + 500) : (x - 1)$$

$$b) (x^{853} + 25) : (x + 1)$$

5. Realiza as seguintes operacións coas fraccións alxébricas:

$$a) \frac{6}{x} + \frac{x+1}{x-2} =$$

$$b) \frac{x+4}{x} - \frac{2x-3}{x^2-5x} =$$

$$c) \frac{3x+1}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} =$$

$$d) \frac{2x}{x+1} : \frac{x-1}{x^2} =$$

6. Resolve as seguintes ecuacións e indica de que tipo se trata:

$$a) 4x^2 - 25 = 0$$

$$b) x^2 - 3x = 0$$

$$c) \frac{x-1}{x-4} - 1 = \frac{x+1}{x-3}$$

$$d) \sqrt{x+2} + 2 = x - 2$$

$$e) 3x(x^2 - 1)(x + 2) = 0$$

$$f) 3x^2 - 5^x = 0$$

$$g) x^4 + x^2 + 1 = 0$$

$$i) x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$$

$$j) -\sqrt{2x-3} + 1 = x$$

$$k) 7^x = 2$$

$$l) \log x - \log(x-1) = 1$$

$$m) 2^{x+2} - 2^{x-1} = 7$$

7. O crecemento dun bosque vén dado pola fórmula  $F=A(1+i)^t$  onde  $F$  é a madeira que haberá dentro de  $t$  anos,  $A$  a madeira actual, e  $i$  a taxa de crecemento anual. Se esta taxa se mantén, calcula o tempo que tardará en duplicarse a madeira do bosque considerando  $i=0,028$ .
9. Lois vai de viaxe en avión coa súa muller e os seus catro fillos menores de idade. Sabendo que pagou por todos os billetes 400€ e que o prezo dos billetes dos menores é a terceira parte dos billetes dos adultos, canto vale cada billete?
10. Calcula tres números consecutivos sabendo que a suma da metade do primeiro, máis a terceira parte do segundo, máis a cuarta parte do terceiro é igual a suma do menor máis tres.
11. Calcula o lado dun cadrado sabendo que o dobre da súa área é  $128\text{ cm}^2$

## Solucións

1. Calcula o valor de m para que a seguinte división sexa exacta:

$$(x^4 + 3x^3 + mx - 3) : (x + 3)$$

Aplicamos o Teorema do resto Resto, se a división é exacta o resto é cero:  $P(-3)=0$ .

$$P(-3) = (-3)^4 + 3(-3)^3 + m(-3) - 3 = 81 - 81 - 3m - 3 = -3m - 3 \Rightarrow -3m - 3 = 0 \Rightarrow m = -1$$

2. O resto da división  $(-x^3 + 3x^2 + kx + 7) : (x + 2)$  é 7. Cal é o valor de K?

Aplicamos o Teorema do Resto, neste caso o valor numérico deberá coincidir con 7:

$$P(-2) = -(-2)^3 + 3(-2)^2 + k(-2) + 7 = 8 + 12 - 2k + 7 = 27 - 2k \Rightarrow 27 - 2k = 7 \Rightarrow k = 10$$

3. Calcula por Ruffini:

a)  $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2) =$

b)  $(x^4 - 81) : (x + 3) =$

*Recorda para aplicar a regra de Ruffini débese poñer os coeficientes ordenados e se falta algún poñer un cero.*

a)  $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2) =$

	1	-2	0	5	-1
2		2	0	0	10
	1	0	0	5	9

Resto = 9    Cociente =  $x^3 + 5$

b)  $(x^4 - 81) : (x + 3) =$

	1	0	0	0	-81
-3		-3	9	-27	81
	1	-3	9	-27	0

Resto = 0    Cociente =  $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$

4. Calcula as raíces enteiras e a descomposición factorial dos seguintes polinomios:

a)  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

b)  $r(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$

a)  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ , Divisores do termo independente =  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

	1	2	-7	-8	12
1		1	3	-4	-12
	1	3	-4	-12	0
2		2	10	12	
	1	5	6	0	
-3		-3	-6		
	1	2	0		
-2		-2			
	1	0			

Raíces son 1,2,-3,-2 a descomposición  $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$

b)  $r(x) = x^3 - 4x^2 - 5x = x(x^2 - 4x - 5)$  sacamos factor común xa que non temos termo independente, agora en lugar de facer Ruffini para atopar as raíces podemos resolver a ecuación de 2º grao

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \text{ obtemos } x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

As raíces son 0,-1,5

A descomposición factorial  $r(x) = x(x + 1)(x - 5)$

5. Calcula o resto das seguintes divisións:

a)  $(x^{500} + 500) : (x - 1)$

b)  $(x^{853} + 25) : (x + 1)$

a)  $(x^{500} + 500) : (x - 1)$  Non podemos aplicar a regra de Ruffini por ter un grao tan elevado, así que aplicaremos o teorema do resto, calculando o valor numérico en  $x=1$ ,  $1^{500} + 500 = 501$

b)  $(x^{853} + 25) : (x + 1)$  Non podemos aplicar a regra de Ruffini por ter un grao tan elevado, así que aplicaremos o teorema do resto, calculando o valor numérico en  $x=-1$   $(-1)^{853} + 25 = 24$

6. Realiza as seguintes operacións coas fraccións alxébricas:

a)  $\frac{6}{x} + \frac{x+1}{x-2} =$

b)  $\frac{x+4}{x} - \frac{2x-3}{x^2-5x} =$

c)  $\frac{3x+1}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} =$

d)  $\frac{2x}{x+1} : \frac{x-1}{x^2} =$

Recordar para sumar e restar teremos que facer o m.c.m e para multiplicar e dividir non é necesario, mirar se podemos simplificar.

$$a) \frac{6}{x} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{6(x-2) + (x+1)x}{x(x-2)} = \frac{x^2 + 7x - 12}{x^2 - 2x}$$

$$b) \frac{x+4}{x} - \frac{2x-3}{x^2-5x} = \frac{(x+4)(x-5) - (2x-3)}{x^2-5x} = \frac{x^2 - 3x - 17}{x^2 - 5x}$$

$$c) \frac{3x+1}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{(3x+1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2+x}{x^2-1}$$

$$d) \frac{2x}{x+1} : \frac{x-1}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2-1}$$

7. Resolve as seguintes ecuacións e indica de que tipo se trata:

a)  $4x^2 - 25 = 0$                       b)  $x^2 - 3x = 0$

c)  $\frac{x-1}{x-4} - 1 = \frac{x+1}{x-3}$                       d)  $\sqrt{x+2} + 2 = x - 2$

e)  $3x(x^2 - 1)(x + 2) = 0$                       f)  $3^{x^2} - 5^x = 0$

g)  $x^4 + x^2 + 1 = 0$                       h)  $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$

i)  $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$                       j)  $7^x = 2$

k)  $\log x - \log(x-1) = 1$                       l)  $2^{x+2} - 2^{x-1} = 7$

a)  $4x^2 - 25 = 0$  Ecuación de segundo grao incompleta

$$x^2 = \frac{25}{4} \quad x = \pm\sqrt{25/4} = \pm\frac{5}{2}$$

b)  $x^2 - 3x = 0$  Ecuación de segundo grao incompleta

$$x(x-3) = 0 \quad x = 0 \quad x = 3$$

c)  $\frac{x-1}{x-4} - 1 = \frac{x+1}{x-3}$  Ecuación racional, débese facer m.c.m. dos denominadores

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-4)(x-3)} - \frac{(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-3)} = \frac{(x+1)(x-4)}{(x-4)(x-3)}$$

$$x^2 - 4x + 3 - x^2 + 7x - 12 = x^2 - 3x - 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ resolvemos } x = 5 \quad x = 1 \text{ as dúas son válidas}$$

d)  $\sqrt{x+2} + 2 = x - 2$  Ecuación con radicais, illamos a raíz

$$\sqrt{x+2} = x - 4 \text{ Elevamos ao cadrado ambos termos } \Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (x-4)^2$$

$x+2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$  resolvemos  $x = 7$  e  $x = 2$ , comprobamos ambas solucións,  $x=2$  non é válida e  $x=7$  si!!

e)  $3x(x^2 - 1)(x + 2) = 0$  Ecuación de grao 3 ou superior, como a ecuación está factorizada iguálase cada factor a cero

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

f)  $3^{x^2} - 5^x = 0$  Ecuación exponencial

$$3^{x^2} = 5^x \Rightarrow \log 3^{x^2} = \log 5^x$$

$x^2 \log 3 = x \log 5$ , extraemos factor común a  $x \Rightarrow x(x \log 3 - \log 5) = 0$  e obtemos dúas solucións

$$x = 0$$

$$x \log 3 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1,47$$

g)  $x^4 + x^2 + 1 = 0$  Ecuación bicuadrática,  $x^2 = t \Rightarrow t^2 + t + 1 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ non existe solución}$$

h)  $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$  Ecuación de grao 3 ou superior

$x(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 0 \Rightarrow$  aplicamos Ruffini e a súa descomposición é

$$P(x) = x(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

As solucións son:  $x = 0, x = 1, x = -1, x = 2$

i)  $-\sqrt{2x - 3} + 1 = x$

$$-\sqrt{2x - 3} = x - 1 \Rightarrow (-\sqrt{2x - 3})^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ solución única}$$

Comprobamos  $x=2$   $-\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + 1 = 2 \Rightarrow 0 \neq 2 \Rightarrow$  A solución  $x = 2$  non é válida

j)  $7^x = 2 \Rightarrow$  Aplicamos logaritmos  $\ln 7^x = \ln 2 \Rightarrow x \ln 7 = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 7} = 0,3562$

k)  $\log x - \log(x - 1) = 1 \Rightarrow \log \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = 10^1 \Rightarrow x = 10(x - 1) \Rightarrow x = 10/9$

l)  $2^{x+2} - 2^{x-1} = 7 \Rightarrow 2^x \cdot 2^2 - \frac{2^x}{2} = 7 \Rightarrow$  cambio de variable  $4t - \frac{t}{2} = 7 \Rightarrow$

$$7t = 14 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

8. O crecemento dun bosque vén dado pola fórmula  $F=A(1+i)^t$  onde  $F$  é a madeira que haberá dentro de  $t$  anos,  $A$  a madeira actual, e  $i$  a taxa de crecemento anual. Se esta taxa se mantén, calcula o tempo que tardará en duplicarse a madeira do bosque considerando  $i=0,02$ .

Se duplica a madeira  $F=2A$

$$F = A(1+i)^t \Rightarrow 2A = A(1+i)^t \Rightarrow 2 = (1+i)^t \Rightarrow \log 2 = \log(1+i)^t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log(1+i)}$$

Se  $i=0,02 \Rightarrow t=35$  anos

A madeira do bosque tardará 35 anos en duplicarse.

9. Lois vai de viaxe en avión coa súa muller e os seus catro fillos menores de idade. Sabendo que pagou por todos os billetes 400€ e que o prezo dos billetes dos menores é a terceira parte cos billetes dos adultos, canto vale cada billete?

Sexa  $x =$  prezo dun billete adulto

$$2x + 4 \cdot \frac{x}{3} = 400$$

$$6x + 4x = 1200$$

$$10x = 1200 \quad x = 120€ \text{ billete adulto e } 30€ \text{ billete niño}$$

10. Calcula tres números consecutivos sabendo que a suma da metade do primeiro, máis a terceira parte do segundo, máis a cuarta parte do terceiro é igual a suma do menor máis tres.

Sexan  $x, x+1, x+2$  os tres números consecutivos

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{4} = x + 3 \Rightarrow 6x + 4x + 4 + 3x + 6 = 12x + 36 \Rightarrow x = 26$$

Os números son 26, 27 e 28

11. Calcula o lado duna cadrado sabendo que o dobre da súa área é  $128 \text{ cm}^2$

Sexa  $x$  o lado do cadrado, entón  $2x^2 = 128 \Rightarrow x^2 = \frac{128}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$  mirando o contexto no que nos atopamos o valor negativo non ten sentido, así que solución é  $x = 8 \text{ cm}$ , lado do cadrado.