

SISTEMAS E INECUACIÓNS

Exercicios autoavaliabes

1. Resolve polo método máis axeitado os seguintes sistemas:

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ y = 13 - 4x \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2x-y}{2} + \frac{y}{5} = 5 \\ \frac{5x}{6} + \frac{y-x}{2} = 7 \end{cases}$$

2. Resolve graficamente o seguinte sistema, clasifícao segundo as súas solucións.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 5x + 5y = 15 \end{cases}$$

3. Resolve por Gauss os seguintes sistemas:

a)
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 6y + 9z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$
 c)
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$
 d)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$$

4. A altura sobre o lado desigual dun triángulo isósceles mide 15cm e o seu perímetro 50cm. Calcula o valor dos seus lados?

5. A idade dun pai é o cadrado da do seu fillo. Dentro de 24 anos a idade do pai será o dobre da do seu fillo . Cantos anos teñen agora?.

6. Sexa o sistema $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ kx + 2y = 2 \end{cases}$ Calcula os valores que debe tomar K para que o sistema sexa:

a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado c) Resolvélo cando $k=-1$

7. Resolve numericamente os sistemas de segundo grao:

a)
$$\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

8. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $-2x + 1 < 7$

b) $2x - 3 < x - 1$

c) $(3x - 2)/2 \leq (2x + 7)/3$

d) $2x - 3y \leq 3$

e) $x^2 - 2x \geq -1$

f) $x^2 - 5x + 6 < 0$

h) $3(x - 3) \leq 1 - 7x$

i) $x^2 - 1 < 0$

9. Resolve a seguinte inecuación: $3 \leq \frac{2x+4}{x-1}$

10. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións:

a) $\begin{cases} x + y > 2 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

11. Calcula o prezo dun abrigo e duns zapatos sabendo que o prezo do abrigo e dos zapatos son proporcionais a 3 e a 2; ademais se o abrigo o rebaixan o 20% e os zapatos un 30% págase 76€.

12. Calcula dous números que se diferencian en 2 unidades e a suma dos seus cadrados é 580.

13. A idade actual de Lois é a suma do triplo da súa filla María e o dobre da do seu fillo Xosé. A suma das 3 idades actuais é 55. Ademais, dentro de 15 anos será a diferenza entre o triplo da que teñan María e da que teña Xosé. Cal é a idade de cada un?

Solucións

1. Resolve polo método máis axeitado os seguintes sistemas.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ y = 13 - 4x \end{cases}$$

O resolvemos neste caso polo método de igualación, xa que na segunda ecuación temos a y despxada:

$$2x + 3(13 - 4x) = 19$$

$$2x + 39 - 12x = 19 \Rightarrow x = 2, \text{ calculamos } y = 13 - 4 \cdot 2 = 5$$

Os valores solución son $x = 2$ e $y = 5$

b)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2x-y}{2} + \frac{y}{5} = 5 \\ \frac{5x}{6} + \frac{y-x}{2} = 7 \end{cases}$$

Débense eliminar os denominadores de ámbalas dúas ecuacións, antes de aplicar ningún método:

$$\begin{cases} 10x + 15(2x - y) + 6y = 150 \\ 5x + 3(y - x) = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40x - 9y = 150 \\ 2x + 3y = 42 \end{cases}$$

Aplicamos o método de redución, e eliminaremos a incógnita y

$$\begin{cases} 40x - 9y = 150 \\ 6x + 9y = 126 \end{cases}$$

$$46x = 276 \Rightarrow x = 6 \quad \text{calculamos e substituímos na 2ª ecuación} \Rightarrow 2 \cdot 6 + 3y = 42 \Rightarrow y = 10$$

Os valores solución son $x = 6$ e $y = 10$

2. Resolve graficamente o seguinte sistema, clasifícao segundo as súas solucións

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 5x + 5y = 15 \end{cases}$$

Deberemos representar ambas rectas para o cal daremos dous valores, coma mínimo en cada unha das ecuacións, previamente deberemos despxar a incógnita y

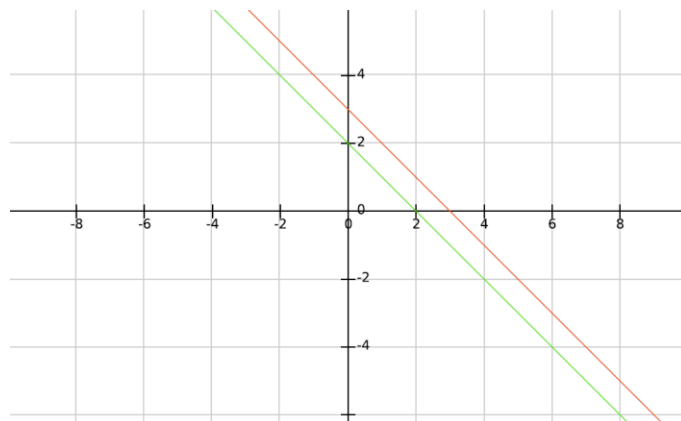
$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$$

x	0	1	2
y	2	1	0

$$5x + 5y = 15 \Rightarrow y = \frac{15 - 5x}{5} = 3 - x$$

x	0	1	2
y	3	2	1

Representamos os valores e obtemos que son paralelas, o Sistema é incompatible, non ten solución.



3. Resolve por Gauss os seguintes sistemas

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 6y + 9z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ x - y + z = 6 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 6y + 9z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -1 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Eliminamos } x \text{ da } 2^{\text{a}} \text{ e da } 3^{\text{a}} \text{ ecuación facendo: } (2^{\text{a}} - 3 \cdot 1^{\text{a}} \text{ e } 3^{\text{a}} + 1^{\text{a}})$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Neste caso coma desaparecen dúas ecuacións para poder resolvelo deberemos chamar as solucións dependes de dous parámetros, xa que desaparecen dúas incógnitas:

$$z = \mu \quad y = \lambda \quad \text{e polo tanto } x = 2\lambda - 3\mu + 1 \text{ con } \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

Atopámonos nun sistema compatible indeterminado que ten infinitas solucións.

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{cambiamos a orde das ecuacións } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Eliminamos x da 2^{a} e 3^{a} ecuación facendo: $(2^{\text{a}} - 3 \cdot 1^{\text{a}} \text{ e } 3^{\text{a}} - 5 \cdot 1^{\text{a}})$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ -2y + 9z = -3 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{eliminamos } y \text{ da } 3^{\text{a}} (3^{\text{a}} - 2 \cdot 2^{\text{a}}) \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Agora xa podemos resolver e obtemos: $z = 1 \quad y = 6 \quad x = -4$

Atopámonos nun sistema compatible determinado, solución única.

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{cambiamos a orde das ecuacións } \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ 2x - y + 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

eliminamos a x da 2ª e 3ª ecuación facendo: $(2^a - 4 \cdot 1^a; 3^a - 2 \cdot 1^a) \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 2z = -3 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Eliminamos a}$

y da 3ª ecuación:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 2z = -3 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow (3^a - 2 \cdot 2^a \text{ ecuación}) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 2z = -3 \\ 0 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

como a última ecuación non ten sentido o sistema é incompatible, non ten solución.

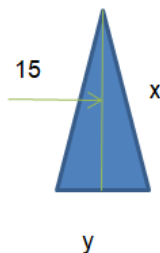
4. A altura sobre o lado desigual dun triángulo isósceles mide 15cm e o seu perímetro 50cm. Calcula o valor dos seus lados?

X =lado igual

Y =lado desigual

Por Pitágoras $\Rightarrow x^2 = 15^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$

Polo perímetro $\Rightarrow 2x + y = 50$



Temos un sistema non lineal resolvemos

$$\begin{cases} x^2 = 15^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \quad \text{por}$$

substitución despexamos a y da segunda ecuación que é a máis sinxela $y = 50 - 2x$ e a substituímos na primeira ecuación obtendo: $x^2 = 15^2 + \left(\frac{50-2x}{2}\right)^2$ realizamos as contas, coidado temos unha identidade notable, e queda a seguinte ecuación de 1º grao: $200x = 3400 \Rightarrow x = 17\text{cm}$ lado igual e $y = 16\text{cm}$ desigual

5. A idade dun pai é o cadrado da do seu fillo. Dentro de 24 anos a idade do pai será o dobre da do seu fillo. Cantos anos teñen agora?

Pai= x

Fillo= y

$$\begin{cases} x = y^2 \\ (x + 24) = 2(y + 24) \end{cases}$$

Resolvemos os sistema por substitución, xa temos a x despexada na primeira ecuación:

$(y^2 + 24) = 2(y + 24) \Rightarrow y^2 + 24 - 2y - 48 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 24 = 0$ resolvemos a ecuación de segundo grao e obtemos $y = 6$ e $y = -4$ temos que descarta a solución negativa neste enunciado, así que nos quedamos co valor $y = 6$ anos a idade do fillo e a idade do pai é o cadrado $x = 36$ anos.

6. Sexa o sistema $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ kx + 2y = 2 \end{cases}$ Calcula os valores que debe tomar K para que o sistema sexa:

a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado c) Resolvelo cando $k = -1$

Solución.

Resolvemos o sistema polo método de redución, eliminamos a y , deberemos multiplicar a primeira ecuación por 2.



$$\begin{cases} 8x - 2y = -12 \\ kx + 2y = 2 \end{cases}$$

$$(8 + k)x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{8+k} \text{ expresión que ten sentido se } k \neq -8$$

Polo tanto:

a) Se $k \neq -8$, non ten sentido sistema compatible e determinado, SIN.

b) O sistema nunca é compatible indeterminado.

c) Si $K = -1$ o sistema queda $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ resolvemos o sistema e obtemos $x = -10/7$ e $y = 2/7$

7. Resolve numericamente os sistemas de segundo grao

$$\text{a) } \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

a) Como é un sistema non lineal, o método máis sinxelo é substitución, xa temos a x despexada na primeira ecuación, así que na segunda obtemos:

$\sqrt{y^2 - 2y + 1} + y = 5 \Rightarrow$ ecuación con raíces, na que se debe deixar soa a raíz e logo elevar ao cadrado:

$$\sqrt{y^2 - 2y + 1} = 5 - y \Rightarrow \left(\sqrt{y^2 - 2y + 1}\right)^2 = (5 - y)^2 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 25 - 10y + y^2 \Rightarrow -24 = -8y \Rightarrow y = 3 \text{ con este valor calculamos o valor da } x = 4$$

b) Por substitución $x = y + 1 \Rightarrow (y + 1)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$ calculamos a x para as dúas solucións de letra y e obtemos:

Para $y = 3$, $x = 4$

Para $y = -4$, $x = -3$

8. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $-2x + 1 < 7$

b) $2x - 3 < x - 1$

c) $(3x - 2)/2 \leq (2x + 7)/3$

d) $2x - 3y \leq 3$

e) $x^2 - 2x \geq -1$

f) $x^2 - 5x + 6 < 0$

h) $3(x - 3) \leq 1 - 7x$

i) $x^2 - 1 < 0$

a) $-2x + 1 < 7 \Rightarrow -2x < 7 - 1 \Rightarrow -2x < 6 \Rightarrow x > -3$ Solución = $(-3, \infty)$

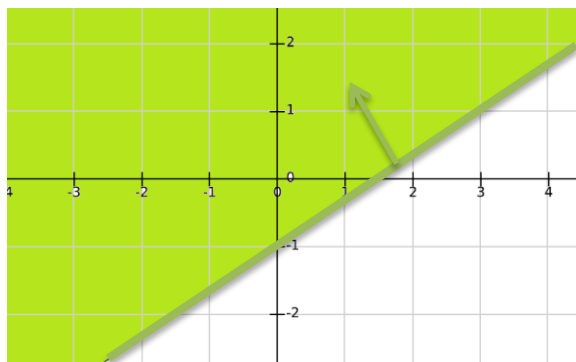
b) $2x - 3 < x - 1 \Rightarrow 2x - x < -1 + 3 \Rightarrow x < 2$ Solución = $(-\infty, 2)$

c) $\frac{3x-2}{2} \leq \frac{2x+7}{3} \Rightarrow 9x - 6 \leq 4x + 14 \Rightarrow 9x - 4x \leq 14 + 6 \Rightarrow 5x \leq 21 \Rightarrow x \leq \frac{21}{5} \Rightarrow x \leq 4$
Solución = $(-\infty, 4]$



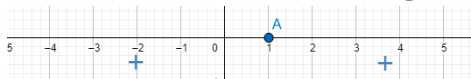
d) $2x - 3y \leq 3 \Rightarrow$ debemos representar a recta $y = \frac{2}{3}x - 1$ damos valores e representamos a recta, logo estudamos o semiplano solución

x	0	3	6
y	-1	1	3



e) $x^2 - 2x \geq -1$

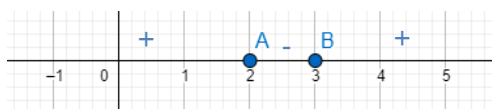
Resolvemos a ecuación de 2º grao $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$ dobre representamos na recta o valor 1 e estudamos a ambos lados o signo e obtemos un valor positivo



Solución = $\mathbb{R}$

f) $x^2 - 5x + 6 < 0$

Resolvemos a ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ obtemos dúas solucións $x=3$ e $x=2$, as representamos na recta real e estudamos o signo nos diferentes intervalos, neste caso a solución válida é o intervalo ou intervalos onde o valor sexa negativo estritamente.

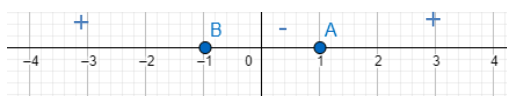


Solución = $(2,3)$

h) $3(x - 3) \leq 1 - 7x \Rightarrow 3x - 9 \leq 1 - 7x \Rightarrow 10x \leq 10 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow$ Solución = $(-\infty, 1]$

i) $x^2 - 1 < 0$

Resolvemos a ecuación de segundo grao $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, as representamos na recta real e estudamos o signo nos diferentes intervalos, neste caso a solución válida é o intervalo ou intervalos onde o valor sexa negativo estritamente.



Solución = $(-1,1)$

9. Resolve a seguinte inecuación: $3 \leq \frac{2x+4}{x-1}$

1. A transformamos nunha inecuación equivalente pasando todo os termos para un membro:

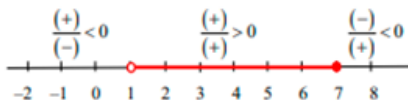
$$0 \leq \frac{2x+4}{x-1} - 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{2x+4-3(x-1)}{x-1} \Rightarrow 0 \leq \frac{7-x}{x-1}$$

2. Resolvemos as ecuacións e representamos as solucións na recta real.

$$7 - x = 0 \Rightarrow x = 7$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

3. Estudamos o signo do numerador e denominador en cada intervalo:



Neste caso o valor $x=7$ tamén é válido xa que buscamos os puntos maiores ou iguais a cero.

Polo tanto a solución serán todos os valores de $x \in (1, 7]$

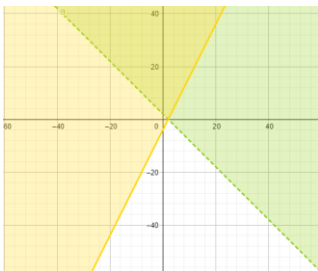
2.

10. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións:

a) $\begin{cases} x + y > 2 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y > 2 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$

Debemos representar cada recta por separado dando valores e estudando o semiplano solución, tendo en conta que se temos a igualdade a recta forma parte da solución.



b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ representamos estes valores na recta real e damos valores, obtemos

Solución $(-2, 2)$

$x - 4 > 1 \Rightarrow x > 1 + 4 \Rightarrow x > 5$ Solución $(5, \infty)$

Debemos estudar a intersección de ambos intervalos, neste caso non existe, polo tanto non terá solución.

Solución $= \emptyset$

11. Calcula o prezo dun abrigo e duns zapatos sabendo que o prezo do abrigo e dos zapatos son proporcionais a 3 e a 2; ademais se o abrigo o rebaixan o 20% e os zapatos un 30% págase 76€.

Prezo abrigo: x

Prezo zapatos: y

$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \\ 0,8x + 0,7y = 76 \end{array} \right\}$ trátase dun sistema lineal así que o podemos resolver por calquera método, recoméndase eliminar previamente o denominadores antes de aplicar o método que desexemos. Obtemos un valor para a $y=40$ € zapatos e $x=60$ € o abrigo.

12. Calcula dous números que se diferencian en 2 unidades e a suma dos seus cadrados é 580.

Sexa x e y os números que temos que calcular

$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 580 \end{array} \right.$ Despexamos a x da primeira ecuación $x=2+y$ e substituímos na segunda

$(2 + y)^2 + y^2 = 580$ calculamos as solucións da ecuación de segundo grao e obtemos $y = \begin{cases} -18 \\ 16 \end{cases}$

Neste caso as dúas solucións son válidas e calculamos os valores da x respectivamente:

$y = -18, x = -16$

$y = 16$ e $x = 18$

Os dous pares de números cumpren as condicións.

13. A idade actual de Lois é a suma do triplo da súa filla María e o dobre da do seu fillo Xosé. A suma das 3 idades actuais é 55. Ademais, dentro de 15 anos será a diferenza entre o triplo da que teñan María e da que teña Xosé. Cal é a idade de cada un?

Lois: x María: y Xosé: z

Dentro de 15 anos: Lois: $x+15$, María: $y+15$ Xosé $z+15$

$\left\{ \begin{array}{l} x = 3y + 2z \\ x + y + z = 55 \\ x + 15 = 3(y + 15) - (z - 15) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 2z = 0 \\ x + y + z = 55 \\ x - 3y + z = 15 \end{array} \right. \Rightarrow$ Eliminamos a x da 2ª e 3ª ecuación restando a primeira ecuación tanto a segunda como a terceira:

$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 2z = 0 \\ 4y + 3z = 55 \\ 3z = 15 \end{array} \right.$ Despexamos a $z=5$ sucesivamente $y=10$ e $x=40$

Solución Lois ten 40 anos, María 19 anos e Xosé 5 anos.