SISTEMAS E INECUACIÓNS

Exercicios autoavaliables

1. Resolve polo método máis axeitado o seguinte sistema.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-y}{2}+\dfrac{x+y}{3}=1 \\ \dfrac{5x+2}{3}-\dfrac{3y}{4}=1 \end{array}\right\}$$

2. A superficie dunha habitación é 30 metros cadrados e o seu perímetro é 22m. Calcula as súas dimensións.

3. Sexa o sistema $\begin{cases} 4x+by=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$. Comproba que se b=-2, o sistema é incompatible.

4. Resolve por Gauss os seguintes sistemas e clasifícaos:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{r} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{array}\right\}$$

5. Resolve os seguintes sistemas non lineais:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{r} x\cdot y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$$

6. Resolve as seguintes inecuacións

$a)-2x-3>5$
b) $x^2+2x<-1$
c) $x^2-5x+6\geq 0$
d) $2x-\frac{5x}{6}>\frac{x}{4}+\frac{11}{4}$
e) $3(x-3)\leq 2-7x$
f) $\frac{x-1}{2}>x-1$
g) $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}-1\leq\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$
h) $x^2-1\geq 0$

7. Resolve a seguinte inecuación con claridade: $\frac{x^2+2x}{x-1}\leq 2x$

8. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y\leq 2 \\ x-2y>1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x^2-9\leq 0 \\ x-1>1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{5}<\frac{y}{4} \\ y\geq x \end{array}\right\}$

9. A unha exposición asisten menos de 100 persoas e recadan máis de 260€ con entradas de 2 € e 4 €. Cantas entradas de cada tipo poderán ser vendidas?

10. Mandar un paquete por unha empresa de transporte custa 3€ máis 0,10€ por cada 100g; polo servizo de urxencia custa 4,50€ máis 0,06€ por cada 100g. Calcula os pesos dos paquetes que interesa enviar por urxencias.

11. Pola mestura de 1kg de pintura verde, 4kg de pintura branca e 3kg de pintura vermella paguei 54€. Por outra de un kg de cada pintura paguei 25€. E outra de 2kg de pintura verde , 2kg de pintura branca e 3kg de pintura vermella paguei 60€. Calcula o prezo de 1kg de pintura branca, 1kg de pintura verde e un kg de pintura vermella.

12. Nos grupos A, B e C do grao de Economía da universidade están matriculados un total de 350 alumnos e alumnas. O número de matriculados no grupo A coinciden con número do grupo B máis o dobre dos do grupo C. Os alumnos e alumnas matriculados no grupo B máis o dobre dos do grupo A superan en 250 ao quíntuplo dos do grupo C. Calcula o número de alumnos e alumnas que están matriculados en cada grupo.

Solucións

1. Resolve polo método máis axeitado o seguinte sistema.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-y}{2}+\dfrac{x+y}{3}=1\\ \dfrac{5x+2}{3}-\dfrac{3y}{4}=1\end{array}\right\}$$

Eliminamos os denominadores facendo o m.c.m en cada unha das ecuacións e obtemos o seguinte sistema lineal: $\left.\begin{array}{r}5x-y=6\\ 20x-9y=4\end{array}\right\}$

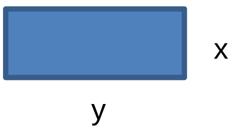
Resolvemos por calquera dos métodos, neste caso o imos facer por redución eliminamos a x, multiplicando a primeira ecuación por -4:

$$\left.\begin{array}{l}-\cancel{20x}+4y=-24\\ \ \ \cancel{20x}-9y=4\end{array}\right\}$$

-5y= -20 $\Rightarrow y=4$

Con este valor imos a calquera das dúas ecuacións e calculamos o valor da x e obtemos x=2

2. A superficie dunha habitación é 30 metros cadrados e o seu perímetro é 22m. Calcula as súas dimensións.



Chamamos x a un lado e y o outro construímos o sistema, tendo en conta que se o perímetro é 22m o a metade do perímetro é 11m $\left.\begin{array}{r}x\cdot y=30\\ x+y=11\end{array}\right\}$

Trátase dun sistema non lineal que deberemos resolver por substitución despexamos y=11-x da segunda ecuación x(11-x)=30⇒ x=$\begin{cases}6\\5\end{cases}$

Calculamos:

Para x=6 obtemos y=5

Para x=5 obtemos y=6

Solución 6m por 5m ou se lle déramos a volta ao cadrado sería 5m por 6m.

3. Sexa o sistema $\begin{cases} 4x + by = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$. Comproba que se b=-2, o sistema é incompatible.

Se b=-2, o sistema sería $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ ⇒ *Por redución eliminamos a y* $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$ *contraditorio* $5 \neq -8$

Sistema incompatible, sen solución

4. Resolve por Gauss os seguintes sistemas e clasifícaos:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{r} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{array}\right\}$$

$a)\ \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{array}\right\}$ *Eliminamos x da 2ª e da 3ª (2ª-2·* $1^{\text{a}}\ e\ 3^{\text{a}} - 1^{\text{a}}$) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y - 6z = 7 \\ -2y = -2 \end{array}\right\}$

Da terceira ecuación obtemos y=1, da segunda z=-1 e da primeira x=1

$b)\ \left.\begin{array}{r} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{array}\right\}$ *Eliminamos x da 2ª e da 3ª(2ª-1ª e 3ª-1ª)* $\left.\begin{array}{r} x - 9y + 5z = 33 \\ 12y - 6z = -42 \\ 8y - 4z = -28 \end{array}\right\}$

Eliminamos y da 3ª ($12 \cdot 3^{\text{a}} - 8 \cdot 2^{\text{a}}$) $\left.\begin{array}{r} x - 9y + 5z = 33 \\ 12y - 4z = 42 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$

Como a última ecuación desaparece temos que denotar z=λ, $y = \frac{-7}{2} + \frac{1}{2}\lambda$, $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda$ $\lambda \in \mathbb{R}$ *Atopámonos nun sistema incompatible indeterminado.*

5. Resolve os seguintes sistemas non lineais:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{r} x \cdot y = 1 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{array}\right\}$

Resolvemos polo método de substitución y=7-x $\Rightarrow x^2 + (7 - x)^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0$ $\mathit{resolvemos\ a\ ecuación}\ x = 4\ e\ x = 3$ *calculamos a y, para x=4 y=3 e x=3 y=4.*

b) $\left.\begin{array}{r} x \cdot y = 1 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$

Como o sistema non é lineal o resolveremos polo método de substitución $x = 2 - y \Rightarrow (2 - y)y = 1 \Rightarrow$ *Resolvemos a ecuación de 2ºgrao obtemos a solución única y=1, substituímos e x=1*

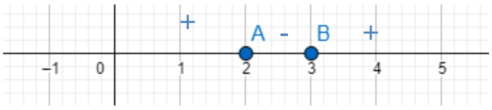
6. Resolve as seguintes inecuacións:

$a) - 2x - 3 > 5$
b)$x^2 + 2x < -1$
c)$x^2 - 5x + 6 \geq 0$
d)$2x - \frac{5x}{6} > \frac{x}{4} + \frac{11}{4}$
e) $3(x-3) \leq 2 - 7x$
f) $\frac{x-1}{2} > x - 1$
g) $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} - 1 \leq \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$
h) $x^2 - 1 \geq 0$

$a) - 2x - 3 > 5 \Rightarrow -2x > 5 + 3 \Rightarrow -2x > 8 \Rightarrow x < -4; \; Solución = (-\infty, -4)$

b) $x^2 + 2x < -1$
Resolvemos a ecuación $x^2 + 2x + 1$*=0 obtemos dúas solucións x=-1 dobre, o representamos na recta real e estudamos o signo nos diferentes intervalos, neste caso a solución válida é o intervalo ou intervalos onde o valor sexa negativo estritamente.* $Solución = \emptyset$

c) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
Resolvemos a ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ *obtemos dúas solucións x=3 e x=2, as representamos na recta real e estudamos o signo nos diferentes intervalos, neste caso a solución válida é o intervalo ou intervalos onde o valor sexa positivo ou nulo.*



Solución=(-∞, $2] \cup [3, \infty)$

d) $2x - \frac{5x}{6} > \frac{x}{4} + \frac{11}{4}$

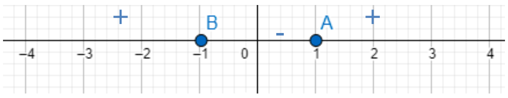
m.c.m(6,4)=12
$24x - 10x > 3x + 33 \Rightarrow 24x - 10x - 3x > 33 \Rightarrow 11x > 33 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \; Solución = (3, \infty)$

e) $3(x-3) \leq 2 - 7x \Rightarrow 3x - 9 \leq 2 - 7x \Rightarrow 10x \leq 11 \Rightarrow x \leq \frac{11}{10} \Rightarrow Solución = \left(-\infty, \frac{11}{10}\right]$

f) $\frac{x-1}{2} > x - 1 \Rightarrow x - 1 > 2x - 2 \Rightarrow -1 + 2 > 2x - x \Rightarrow x < 1 \Rightarrow Solución = (-\infty, 1)$

g) $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} - 1 \leq \frac{2x}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow 3x + 2x - 12 \leq 8x + 6 \Rightarrow 5x - 12 \leq 8x + 6 \Rightarrow -12 - 6 \leq 8x - 5x \Rightarrow$
$-18 \leq 3x \Rightarrow x \geq \frac{-18}{3} \Rightarrow x \geq -6 \; \Rightarrow Solución = [-6, \infty)$

h) $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow$*Estudamos o signo nos distintos intervalos neste caso a solución será os intervalos positivos e tamén so valores nulos.*



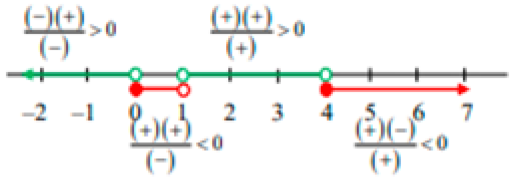
Solución: =(-∞, $-1] \cup [1, \infty)$

7. Resolve a seguinte inecuación con claridade: $\frac{x^2+2x}{x-1} \leq 2x$

Transformamos a inecuación $\frac{x^2+2x}{x-1} - 2x \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-2x^2+2x}{x-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x^2+4x}{x-1} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x(4-x) = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases}$

Resolvemos as ecuacións, obtemos coma solución do numerador x=0 e x=4, do denominador x=1

Representamos nunha recta e estudamos o signo da fracción:

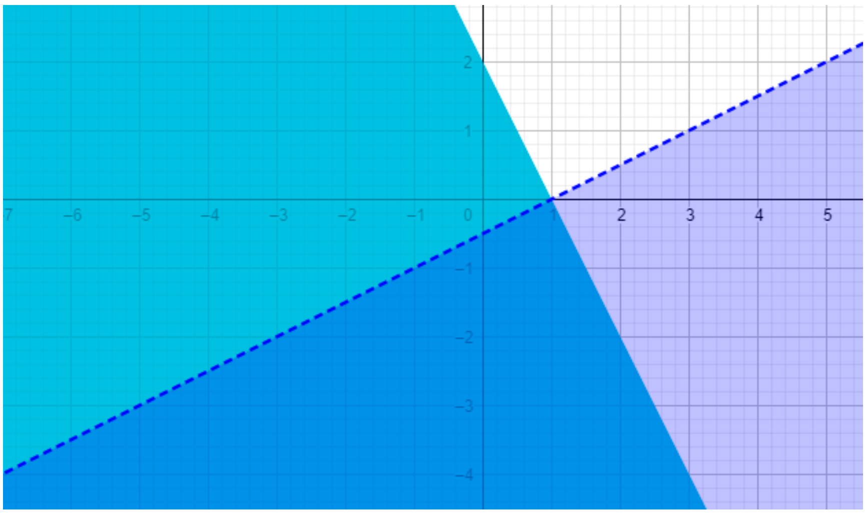


A solución son todos os x∈ $[0,1) \cup [4, \infty)$ *os valores 0 e 4 son válidos porque anulan ao numerador.*

8. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións

a) $\begin{rcases} 2x + y \leq 2 \\ x - 2y > 1 \end{rcases}$ b) $\begin{rcases} x^2 - 9 \leq 0 \\ x - 1 > 1 \end{rcases}$ c) $\begin{rcases} \frac{x}{5} < \frac{y}{4} \\ y \geq x \end{rcases}$

Representamos ambas rectas $\begin{rcases} y = 2 - 2x \\ y = \frac{x-1}{2} \end{rcases}$ *e estudamos cal dos semiplanos e válida para atopar a rexión común.*

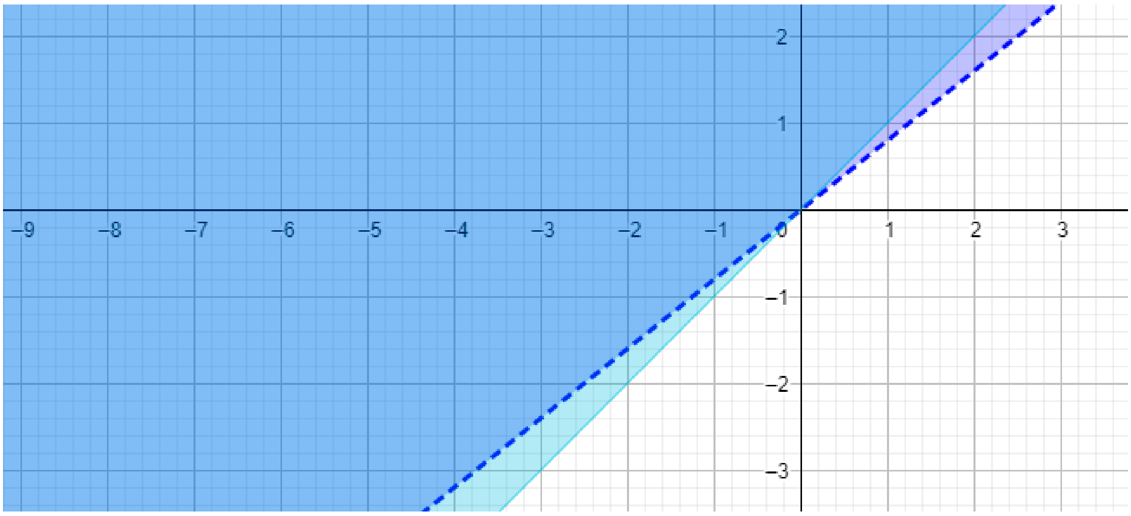


b) $\left.\begin{array}{r} x^2-9\leq 0 \\ x-1>1 \end{array}\right\}$

Resolvemos a ecuación $x^2-9=0 \quad x=\pm 3.$ *Represetamos e estudamos o signo Solución =(-3,3)*
Resolvemos $x-1>1 \quad x>2$
Solución en común (2,3)

c) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{5}<\frac{y}{4} \\ y\geq x \end{array}\right\}$

Representamos ambas rectas $\left.\begin{array}{r} y=\frac{4x}{5} \\ y=x \end{array}\right\}$ *estudamos os semiplanos e buscamos a solución común*



9. A unha exposición asisten menos de 100 persoas e recadan máis de 260€ con entradas de 2 € e 4 €. Cantas entradas de cada tipo poderán ser vendidas?.

Definimos dúas variables x= entradas de 2€ vendidas e y=entradas de 4 € vendidas.
Plantexamos dúas inecuacións
$x+y<100$
$2x+4y>260$
Representamos as dúas rectas e obtemos a rexión solución, calquera punto de coordenadas enteiras da zona "común" é unha solución

10. Mandar un paquete por unha empresa de transporte custa 3€ máis 0,10€ por cada 100g; polo servizo de urxencia custa 4,50€ máis 0,06€ por cada 100g. Calcula os pesos dos paquetes que interesa enviar por urxencias.

Sexa x o peso do paquete.

Custo por envío normal: $3+\frac{0,10}{100}x$; *Custo do envío por urxencias:* $4,5+\frac{0,06}{100}x$

Interesa enviar por urxencias sempre que o custo sexa menor ou igual que o envío normal: $4,5+\frac{0,06}{100}x \leq 3+\frac{0,10}{100}x \Rightarrow x \geq 3750$

Polo tanto, interesa enviar por urxencias os paquetes a partires de 3750gramos.

11. Pola mestura de 1kg de pintura verde, 4kg de pintura branca e 3kg de pintura vermella paguei 54€. Por outra de un kg de cada pintura paguei 25€. E outra de 2kg de pintura verde , 2kg de pintura branca e 3kg de pintura vermella paguei 60€. Calcula o prezo de 1kg de pintura branca, 1kg de pintura verde e un kg de pintura vermella.

Sexan x= prezo de 1kg de pintura verde, y= prezo de 1kg de pintura branca, z= prezo de 1kg de pintura vermella, escribimos as seguintes ecuacións:

$\begin{cases} x+4y+3z=54 \\ x+y+z=25 \\ 2x+2y+3z=60 \end{cases}$ $\Rightarrow$ *eliminamos a x da segunda e da 3ªecuación* $\Rightarrow \begin{cases} x+4y+3z=54 \\ -3y-2z=-29 \\ -6y-3z=-48 \end{cases} \Rightarrow$ *eliminamos a y da terceira ecuación* $\begin{cases} x+4y+3z=54 \\ -3y-2z=-29 \\ z=10 \end{cases}$ *despexamos a y e a x da segunda e terceira ecuación y=3 e x=12.*

12€ prezo de 1kg de pintura verde, 3€ prezo de 1kg de pintura branca, 10€ prezo de 1kg de pintura vermella

12. Nos grupos A, B e C do grao de Economía da universidade están matriculados un total de 350 alumnos e alumnas. O número de matriculados no grupo A coinciden con número do grupo B máis o dobre dos do grupo C. Os alumnos e alumnas matriculados no grupo B máis o dobre dos do grupo A superan en 250 ao quíntuplo dos do grupo C. Calcula o número de alumnos e alumnas que están matriculados en cada grupo.

O número de alumnos e alumnas dos grupos A,B e C son respectivamente x,y e z, obtemos as seguintes ecuacións:

$\begin{cases} x+y+z=350 \\ x=y+2z \\ 2x+y=5z+250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=350 \\ x-y-2z=0 \\ 2x+y-5z=250 \end{cases} \Rightarrow$ *Aplicamos o método de Gauss* $\begin{cases} x+y+z=350 \\ -2y-3z=-350 \\ -11z=-550 \end{cases}$

Despexamos e obtemos z=50, y=100 e x=200.

Hai 200 alumnos e alumnas no grupo A, 100 no grupo B e 50 no grupo C.