MATRICES

1. Definición

Unha matriz é un conxunto de números, ordenados en filas e columnas, formando un rectángulo. Denotaremos as matrices mediante letras maiúsculas: $A, B, C, \ldots$

A cada un dos números da matriz chamarémolos elementos da matriz. Para referirnos a un elemento dunha matriz, indicaremos o nome da matriz en minúscula e poñeremos como subíndices a fila e a columna nas que está situado dito elemento na matriz. Por exemplo, o elemento a_{21} é o elemento da matriz A situado na 2ª fila e na 1ª columna.

Ao conxunto de elementos da forma a_{ii}, é dicir, a aqueles que están na mesma fila que columna, chamarémoslles diagonal principal.

O número de filas e de columnas da matriz recibe o nome de dimensión. Para indicar a dimensión dunha matriz indicaremos primeiro o número de filas e despois o de columnas separados polo símbolo $\times$. Se o número de filas e columnas coincide, diremos que a matriz é cadrada e que ten orde n, sendo n o número de filas (ou de columnas).

Exemplo 1.1:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ é unha matriz 2×2, pois ten 2 filas e 2 columnas. Tamén poderemos dicir que é unha matriz cadrada de orde 2.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ é unha matriz 3×2, pois ten 3 filas e 2 columnas.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ilustración 1: Diagonal principal

O 1 é un elemento da matriz B que está na fila 1 e na columna 1, polo tanto, denótase b_{11}. O 4 é un elemento da matriz B que está na fila 3 e na columna 2, polo tanto, denótase b_{32}. Ademais, 1 e 5 son a diagonal principal porque son os elementos b_{11} e b_{22}, respectivamente.

Se unha matriz ten unha única fila, é dicir, se a súa dimensión é da forma $1 \times n$, chamarémoslle matriz fila.

Do mesmo xeito, se unha matriz ten unha única columna, é dicir, se a súa dimensión é da forma $m \times 1$, entón diremos que é unha matriz columna.

Exemplo 1.2: A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ é unha matriz fila e a matriz $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ é unha matriz columna.

Dúas matrices A e B son iguais se teñen a mesma dimensión (ou a mesma orde) e os elementos que ocupan o mesmo lugar coinciden.

2. Operacións con matrices

2.1 Suma e resta de matrices

Poderemos sumar dúas ou máis matrices, cando as súas dimensións coincidan.

A suma das matrices A e B, $A+B$, obtense sumando os elementos de A e de B que están na mesma posición, é dicir, os que se denotan co mesmo subíndice. Dito doutra forma, a matriz $A+B$, é unha matriz cas mesmas dimensións que A e B, cuxos elementos son a suma dos de A e B que se atopan na mesma posición. Para restalas, $A-B$, procédese do mesmo xeito, pero tomando os elementos de B con signo contrario.

Exemplo 2.1.1: Calcula $A+B$ e $A-B$, sendo $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\\3&4\end{pmatrix}$.

$$A+B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&5\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&2+0\\3+2&4+5\\5+3&6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\5&9\\8&10\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\2&5\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&2-0\\3-2&4-5\\5-3&6-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\\2&2\end{pmatrix}$$

Propiedades da suma

- Asociativa: Dadas 3 matrices, A, B e C, cómprese que $(A+B)+C=A+(B+C)$.

  Exemplo 2.1.2: Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\\3&4\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\\0&2\end{pmatrix}$ calcula $(A+B)+C$ e $A+(B+C)$ e comproba que coinciden.

  No exemplo 2.2.1 vimos que $A+B=\begin{pmatrix}2&2\\5&9\\8&10\end{pmatrix}$. Entón,

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}2&2\\5&9\\8&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2\\1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2&2+2\\5+1&9+3\\8+0&10+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\6&12\\8&12\end{pmatrix}$$

  Calculamos agora $A+(B+C)$. Para elo, primeiro necesitamos calcular $B+C$:

$$B+C=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2\\1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&0+2\\2+1&5+3\\3+0&4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\3&8\\3&6\end{pmatrix}$$

  Entón,

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\3&8\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3&2+2\\3+3&4+8\\5+3&6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\6&12\\8&12\end{pmatrix}$$

  Polo tanto, $(A+B)+C=A+(B+C)$.

- A matriz 0 é unha matriz cuxos elementos son 0. Dita matriz é o elemento neutro da suma, é dicir, que se a unha matriz A lle sumamos a matriz 0 o resultado é A: $A + 0 = A$.

  Exemplo 2.1.3: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calcula $A + 0$ e comproba que coincide con A.

$$A + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 2+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Toda matriz A ten unha matriz oposta, $-A$, que é unha matriz cuxos elementos son os opostos aos de A, é dicir, é igual que A pero cos elementos cambiados de signo e verifica que $A + (-A) = 0$.

  Exemplo 2.1.4: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calcula $A + (-A)$ e comproba que da a matriz 0.

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-2 \\ 2-2 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Conmutativa: A orde na que se suman dúas matrices, A e B, non afecta o resultado $A + B = B + A$.

  Exemplo 2.1.5: Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $B + A$ e comproba que coincide con $A + B$.

$$B + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 \\ 2+3 & 5+4 \\ 3+5 & 4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 9 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

  Observamos que efectivamente coincide con $A + B$ (calculada no exemplo 2.1.1).

2.2 Produto dun número por unha matriz

O produto dun número por unha matriz obtense multiplicando dito número por cada elemento da matriz.

Exemplo 2.2.1:

$$5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Propiedades do produto dun número por unha matriz

- Distributiva respecto da suma de matrices: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B, \lambda \in \mathbb{R}$.

  Exemplo 2.2.2: Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $5 \cdot (A + B)$ e $5A + 5B$ e comproba que son iguais.

  Calculamos primeiro $5 \cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B})$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 2+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$5 \cdot (A + B) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 & 5\cdot 3 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

  Agora calculamos $5A + 5B$.

$$5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 1 \\ 5\cdot 1 & 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5A + 5B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+5 & 10+5 \\ 10+5 & 5+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Entón, $5 \cdot (A + B) = 5A + 5B$

- Distributiva respecto da suma de escalares: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

  Exemplo 2.2.3: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $(2+3)\cdot A$ e $2A + 3A$ e comproba que son iguais.

  $$(2+3)\cdot A = 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \text{ (ver exemplo 2.2.1)}$$

  $$2A + 3A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} =$$
  $$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 4+6 \\ 4+6 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

  Entón, $(2+3)\cdot A = 2A + 3A$

- Asociativa respecto do produto de escalares: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

  Exemplo 2.2.4: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, comproba que $2\cdot(3A) = (2\cdot 3)A$.

  $$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$
  $$2\cdot(3A) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 6 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$
  $$(2\cdot 3)A = 6A = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 1 & 6\cdot 2 \\ 6\cdot 2 & 6\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

  Entón, $2\cdot(3A) = (2\cdot 3)A$

- Elemento unidade: $1 \cdot A = A$.

2.3 Produto de matrices

Para aprender a multiplicar dúas matrices, en primeiro lugar convén aprender a multiplicar unha matriz fila por unha matriz columna.

2.3.1 Produto dunha matriz fila por unha matriz columna

O produto dunha matriz fila por unha matriz columna obtense multiplicando o 1º elemento da fila polo 1º da columna, o 2º da fila polo 2º da columna e así sucesivamente e despois sumando os resultados de ditas multiplicacións. O resultado é outra matriz cun único elemento.

Exemplo 2.3.1.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2) = (9)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2\cdot 1 + 4\cdot 0) = (2)$$

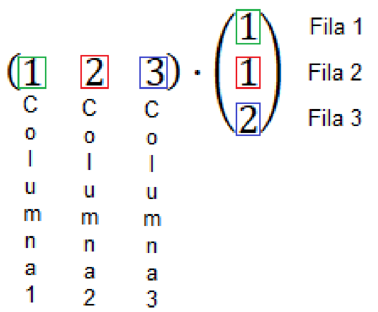

Ilustración 2: Produto dunha matriz fila por unha matriz columna

Como podemos observar no exemplo, para poder multiplicar unha matriz fila por unha matriz columna o número de elementos de ditas matrices ten que coincidir. Dito doutra forma, poderemos multiplicalas se o número de columnas da primeira, coincide co número de filas da segunda.

2.3.2 Produto de dúas matrices

Para multiplicar dúas matrices, A e B, multiplicaremos cada fila de A por cada columna de B tendo en conta o aprendido no apartado anterior.

Logo, poderemos multiplicar dúas matrices, A e B, se o número de columnas de A coincide co número de filas de B.

Exemplo 2.3.2.1: A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ten dimensión 2×2 e a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ten dimensión 3×2.

Non podemos calcular $A \cdot B$ porque o número de columnas de A (2) non coincide co número de filas de B (3). Sen embargo, si que podemos calcular $B \cdot A$ xa que o número de columnas de B (2) coincide co número de filas de A (2).

$$\overbrace{2 \times 2}^{A}\ \overbrace{3 \times 2}^{B} \qquad\qquad \overbrace{3 \times 2}^{B}\ \overbrace{2 \times 2}^{A}$$

Ademais, a matriz $B \cdot A$ ten dimensións 3×2: $3 \times \cancel{2} - \cancel{2} \times 2 \rightarrow 3 \times 2$

En xeral, se podemos calcular $A \cdot B$, dita matriz terá o mesmo número de filas que A e o mesmo número de columnas que B.

Exemplo 2.3.2.2: Calcula $B \cdot A$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & 9 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Propiedades do produto de matrices

- Propiedade asociativa: Dadas tres matrices A, B e C tales que existan os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot C$, verifícase $(A \cdot B) \cdot C \; = \; A \cdot (B \cdot C)$
- Propiedade distributiva: Dadas tres matrices A, B e C tales que existan os produtos $A \cdot B$ e $A \cdot C$ e a suma $B + C$, verifícase $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- O produto de matrices non é en xeral conmutativo; é dicir, $A \cdot B \neq B \cdot A$.
    - Hai casos nos cales é posible efectuar $A \cdot B$, e non $B \cdot A$. É o caso das matrices do exemplo 2.3.2.1.
    - Nos casos en que é posible efectuar $A \cdot B$ e $B \cdot A$, non sempre dan o mesmo resultado. Ás veces nin sequera son da mesma dimensión.

    Exemplo 2.3.2.3: Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e comproba que son distintas.

A matriz $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ ten dimensión: $2 \times 3 — 3 \times 2 \rightarrow 2 \times 2$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}$$

A matriz $B \cdot A$ ten dimensións 3×2: $3 \times 2 — 2 \times 3 \rightarrow 3 \times 3$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & -1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & -1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 14 & 20 \\ -1 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

2.3.3 Potencias de matrices cadradas

Recordemos que unha potencia, a^b, é un número expresado en función dunha base, a, e un expoñente, b. Para calculala, multiplicamos a base por si mesma tantas veces como nos indique o expoñente.

Exemplo 2.3.3.1: 2^3 calculase multiplicando 2 por si mesmo 3 veces, é dicir, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Podemos extrapolar este concepto ás matrices, tomando como base unha matriz e como expoñente un número. Desta forma, A^2 calcularíase multiplicando a matriz A por si mesma 2 veces, B^3, multiplicando a matriz B por si mesma 3 veces, etc.

Exemplo 2.3.4.2: Calcula A^2 e A^3 sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En xeral para calcular A^3 faríamos $A \cdot A \cdot A$. Neste caso concreto, como xa coñecemos A^2, podemos utilizar que $A^3 = A^2 \cdot A$.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Imaxinemos, agora, que queremos obter A^{100}. Sería moi traballoso multiplicar por A tantas veces. Nestes casos, podemos intentar deducir un patrón cas primeiras potencias e así deducir o valor da potencia para calquera expoñente. A dita potencia denotarémola por A^n.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & 1 & 0 \\ \boxed{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ilustración 3: Matrices A, A^2 e A^3

Exemplo 2.3.4.3: Calcula A^n e despois utilízaa para calcular A^{100}, sendo A a matriz do exemplo 2.3.4.2.

Se comparamos A, A^2 e A^3, podemos observar que a única diferencia entre elas son os elementos a_{21} e a_{31}. Ademais, ditos elementos coinciden co valor do expoñente. Deducimos entón,

$$A^{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{n} & 1 & 0 \\ \boldsymbol{n} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E, polo tanto,

$$A^{\mathbf{100}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{100} & 1 & 0 \\ \mathbf{100} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Matriz trasposta

Chamamos matriz trasposta de A, A^t, á matriz que resulta de cambiar as filas polas columnas da matriz A.

Exemplo 2.4.1: Calcula a matriz trasposta de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Como a matriz A é unha matriz 2×3 (2 filas e 3 columnas), a súa trasposta ten que ser 3×2 (3 filas e 2 columnas).

Collemos as filas de A e escribímolas como columnas:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- A trasposta da trasposta é a matriz inicial: $(A^t)^t = A$.
  Exemplo 2.4.2: Se traspoñemos A^t do exemplo 2.4.1, obtemos que $(A^t)^t = A$.
- A trasposta dunha suma é igual á suma das traspostas: $(A+B)^t = A^t + B^t$
  Exemplo 2.4.3: Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, calcula $(A+B)^t$ e $A^t + B^t$ e comproba que coinciden.
  $$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & -1+2 & 0+0 \\ 2+0 & 4+4 & 8+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$
  Traspoñemos $A+B$:
  $$(A+B)^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$
  Calculamos agora B^t e despois calculamos $A^t + B^t$ (A^t xa se calculou no exemplo 2.4.1)
  $$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
  $$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 2+0 \\ -1+2 & 4+4 \\ 0+0 & 8+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, $(A+B)^t = A^t + B^t$

- Se λ é un número real, entón $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t$.

  Exemplo 2.4.4: Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, calcula $(2A)^t$ e $2 \cdot A^t$ e comproba que coinciden.

  Calculamos $2 \cdot A$ e despois traspoñemos.

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 4 & 2\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(2A)^t = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

  Calculamos agora $2 \cdot A^t$ (A^t xa se calculou no exemplo 2.4.1).

$$2 \cdot A^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

- A trasposta do produto é igual á trasposta do segundo factor pola trasposta do primeiro factor: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

  Exemplo 2.4.5: Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula $(A \cdot B)^t$ e $B^t \cdot A^t$ e comproba que coinciden.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Se $A^t = A$ dise que A é unha matriz simétrica. Dito doutra forma, A é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, para calquera $i, j \in \mathbb{Z}$. Diremos, tamén, que é antisimétrica se $A^t = -A$, é dicir, se $a_{ij} = -a_{ji}$, para calquera $i, j \in \mathbb{Z}$.

  Exemplo 2.4.6: $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ é simétrica e $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ é antisimétrica; $A \cdot B$ do exemplo 2.4.5 é simétrica.

2.5 A matriz identidade

A identidade é unha matriz cadrada cuxa diagonal son uns e o resto de elementos son ceros. Adoita representarse por I ou I_n se queremos indicar a súa orde.

Exemplo 2.5.1:

A matriz identidade de orde 2 é $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A matriz identidade de orde 3 é $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.6 Matriz inversa

Chamamos inversa de A, A^{-1}, a unha matriz que ao multiplicala por A nos da a identidade e viceversa:

$$A \cdot A^{-1} = I \text{ e } A^{-1} \cdot A = I$$

Para que unha matriz teña inversa (sexa invertible) ten que ser cadrada, pero aínda sendo cadrada, a inversa pode non existir.

Diremos que unha matriz é singular se non ten inversa e regular se é invertible.

2.6.1 Calculo da matriz inversa a partir da definición

Dada unha matriz A, podemos calcular a súa inversa utilizando que $A \cdot A^{-1} = I$. Basta con coller unha matriz cadrada (á que chamamos A^{-1}), que teña as mesmas dimensións que A e cuxos elementos son incógnitas $(x, y, z, \dots)$, multiplicala por A ($A \cdot A^{-1}$ ou $A^{-1} \cdot A$) e igualar o resultado á identidade que ten as mesmas dimensións que A.

Exemplo 2.6.1.1: Calcula a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mediante a definición.

Como A é unha matriz cadrada de orde 2, A^{-1} ten que ser tamén unha matriz cadrada de orde 2:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

Calculamos $A \cdot A^{-1}$ (ou $A^{-1} \cdot A$):

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot x + 7 \cdot z & 4 \cdot y + 7 \cdot u \\ 1 \cdot x + 2 \cdot z & 1 \cdot y + 2 \cdot u \end{pmatrix}$$

Agora igualamos dita matriz á identidade de orde 2:

$$\begin{pmatrix} 4x + 7z & 4y + 7u \\ x + 2z & y + 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ao comparar as dúas matrices obtemos as seguintes ecuacións:

$$\begin{cases} 4x + 7z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 \cdot (-2z) + 7z = 1 \\ x = -2z \end{cases} \rightarrow -8z + 7z = 1 \rightarrow -z = 1 \rightarrow z = -1 \rightarrow x = -2 \cdot (-1) \rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} 4y + 7u = 0 \\ y + 2u = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 \cdot (-2u + 1) + 7u = 0 \\ y = -2u + 1 \end{cases} \rightarrow -8u + 4 + 7u = 0 \rightarrow -u + 4 = 0 \rightarrow u = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -2 \cdot 4 + 1 \rightarrow y = -7$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2.6.2 Cálculo da matriz inversa polo método de Gauss

Para calcular a matriz inversa, dunha matriz cadrada A, polo método de Gauss transformaremos a matriz A na identidade (da mesma orde que A). Á par aplicaremos esas mesmas transformacións á identidade e a matriz resultante é A^{-1}.

As transformacións que poderemos aplicar son:

- Cambiar filas de lugar. Indicaremos esta transformación poñendo as dúas filas a intercambiar e no medio unha frecha de dobre sentido. Por exemplo, $F_1 \leftrightarrow F_2$ indica que intercambiamos as filas 1 e 2.

- Multiplicar unha fila por un número distinto de cero. Indicaremos o número e a continuación a fila. Por exemplo, $2F_2$ indica que multiplicamos toda a fila 2 por 2.
- Sumar a unha fila outra multiplicada por un número. Indicaremos en primeiro lugar a fila que queremos modificar e en segundo lugar a fila que lle sumamos. Por exemplo, $F_3 - 2F_1$ indica que modificamos a fila 3, sumándolle a fila 1 multiplicada por -2.

Xeralmente colocaremos a matriz A e ao seu carón a identidade, separadas por unha barra vertical:

$$(A|I_n) \xrightarrow{transformacións} (I_n|A^{-1})$$

Exemplo 2.6.2.1: Acha a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ polo método de Gauss e comproba o resultado.

Temos que aplicar as transformación necesarias para que a matriz M pase a ser a identidade de orde 2.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{A|I} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-1 \cdot F_2} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)}_{I|A^{-1}}$$

Entón, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Observación: Nas matrices de orde 3 (ou superior) recoméndase seguir a seguinte orde.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Ecuacións matriciais

Unha ecuación matricial é unha ecuación cuxa incógnita é unha matriz. Estas ecuacións resólvense multiplicando pola inversa de A, A^{-1}, pero hai que ter en conta as seguintes consideracións:

- As ecuacións matriciais que estudaremos neste curso poden reducirse a unha ecuación da forma $AX = B$ ou $XA = B$ mediante sumas e multiplicacións.
- O produto de matrices non é conmutativo, polo que á hora de multiplicar os dous membros dunha igualdade, débese ter en conta se a multiplicación ten que facerse pola dereita ou pola esquerda.
  - A ecuación $AX = B$ resólvese multiplicando ambos membros por A^{-1} pola esquerda:

$$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B \to \overbrace{(A^{-1} \cdot A)}^{I} \cdot X = A^{-1}B \to I \cdot X = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$$

  - A ecuación $XA = B$ resólvese multiplicando ambos membros por A^{-1} pola dereita:

$$(XA) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \to X \cdot \overbrace{(A \cdot A^{-1})}^{I} = BA^{-1} \to X \cdot I = BA^{-1} \to X = BA^{-1}$$

- Algunhas matrices non teñen inversa.

Exemplo 3.1: Resolve a ecuación matricial $AX+B=C$ onde $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}4 & 6\\-2 & -5\end{pmatrix}$

En primeiro lugar despexamos AX:

$$AX+B-B=C-B \rightarrow AX=C-B$$

Agora despexamos X multiplicando ambos lados por A^{-1} (pola esquerda):

$$A^{-1}\cdot(AX)=A^{-1}\cdot(C-B)\rightarrow \overbrace{(A^{-1}\cdot A)}^{I}\cdot X=A^{-1}(C-B)\rightarrow X=A^{-1}(C-B)$$

Nota: Se nos resulta complicado despexar con $C-B$, podemos cambialo por $D=C-B$: $$AX=C-B\xrightarrow{D=C-B}AX=D\rightarrow X=A^{-1}D$$

Necesitamos calcular as matrices A^{-1} e $C-B$.

Calculamos A^{-1} polo método de Gauss:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\2 & 6 & 0 & 1\end{array}\right)}_{(A|I)}\xrightarrow{F_2-2F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\0 & -2 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+2F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & 2\\0 & -2 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2}\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & 2\\0 & 1 & 1 & -1/2\end{array}\right)}_{(I|A^{-1})}$$

Logo, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Imos calcular, agora, $C-B$:

$$C-B=\begin{pmatrix}4 & 6\\-2 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-0 & 6-2\\-2-3 & -5+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\-5 & -4\end{pmatrix}$$

Entón,

$$X=\overbrace{\begin{pmatrix}-3 & 2\\1 & -1/2\end{pmatrix}}^{A^{-1}}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}4 & 4\\-5 & -4\end{pmatrix}}^{C-B}=\begin{pmatrix}-3\cdot 4+2\cdot(-5) & -3\cdot 4+2\cdot(-4)\\1\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot(-5) & 1\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22 & -20\\13/2 & 6\end{pmatrix}$$

Ás veces o problema consiste en determinar algúns elementos dunha ou varias matrices que figuran nunha ecuación matricial. Neste caso realizaremos as operacións indicadas ata chegar a unha igualdade entre dúas matrices. Compararemos os elementos de ditas matrices e resolveremos as ecuacións resultantes.

Exemplo 3.2: Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}1 & x\\y & z\end{pmatrix}$, determinar os valores de x, y e z para que se verifique a igualdade $A^t\cdot A=10I$

Calculamos A^t (a fila 1 de A é a columna 1 de A^t e a fila 2 de A é a columna 2 de A^t): $A^t=\begin{pmatrix}1 & y\\x & z\end{pmatrix}$

Calculamos $A^t\cdot A$:

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + y \cdot y & 1 \cdot x + y \cdot z \\ x \cdot 1 + z \cdot y & x \cdot x + z \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y^2 & x + yz \\ x + yz & x^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

Calculamos, agora, $10I$. Hai que ter en conta que as dimensión de $10I$ teñen que ser as mesmas que as de $A^t \cdot A$, se non, non poderían ser iguais. Polo tanto tomaremos a identidade de orde 2.

$$10I = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Igualamos as matrices $A^t A$ e $10I$.

$$\begin{pmatrix} 1 + y^2 & x + yz \\ x + yz & x^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Comparando elemento a elemento obtemos as seguintes ecuacións:

$$\begin{cases} 1 + y^2 = 10 \\ x + yz = 0 \\ x + yz = 0 \\ x^2 + z^2 = 10 \end{cases} \xrightarrow[\text{son iguais}]{A\ 2^{\text{a}}\ e\ a\ 3^{\text{a}}} \begin{cases} 1 + y^2 = 10 \to y^2 = 9 \to y = \pm\sqrt{9} \to y = \pm 3 \\ x + yz = 0 \\ x^2 + z^2 = 10 \end{cases}$$

- Se $y = 3$ o sistema redúcese a :

$$\begin{cases} x + 3z = 0\ (E_1) \\ x^2 + z^2 = 10\ (E_2) \end{cases} \xrightarrow[e\ subsituímos\ en\ E_2]{Despexamos\ x\ en\ E_1} \begin{cases} x = -3z \\ (-3z)^2 + z^2 = 10 \end{cases} \xrightarrow{Resolvemos\ E_2}$$

$$9z^2 + z^2 = 10 \to 10z^2 = 10 \to z^2 = 1 \to z = \pm 1$$

  - Se $z = 1 \to x = -3 \cdot 1 \to x = -3 \to (x, y, z) = (-3,3,1)$
  - Se $z = -1 \to x = -3 \cdot (-1) \to x = 3 \to (x, y, z) = (3,3,-1)$

- Se $y = -3$ obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x - 3z = 0\ (E_1) \\ x^2 + z^2 = 10\ (E_2) \end{cases} \xrightarrow[e\ subsituímos\ en\ E_2]{Despexamos\ x\ en\ E_1} \begin{cases} x = 3z \\ (3z)^2 + z^2 = 10 \end{cases} \xrightarrow{Resolvemos\ E_2}$$

$$9z^2 + z^2 = 10 \to 10z^2 = 10 \to z^2 = 1 \to z = \pm 1$$

  - Se $z = 1 \to x = 3 \cdot 1 \to x = 3 \to (x, y, z) = (3,-3,1)$
  - Se $z = -1 \to x = 3 \cdot (-1) \to x = -3 \to (x, y, z) = (-3,-3,-1)$

Solucións: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

4. As matrices na resolucións de problemas

As matrices aparecen con frecuencia nas ciencias que traballan con datos ordenados, como é o caso das Ciencias Físicas, Económicas e Sociais. A continuación, preséntanse algunhas situacións nas que as matrices son de utilidade.

4.1 Organización matricial da información

As matrices de información permiten resumir informacións diversas; entre outras poden estar ligadas a grafos.

Exemplo 4.1.1: As vilas 1, 2, 3 e 4 comunícanse mediante liñas de autobuses de ida e volta como se indica no grafo da ilustración 4.

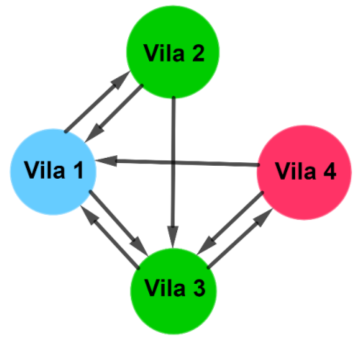

Ilustración 4: Grafo do exemplo 4.1.1

Expresa este grafo en forma de matriz sinalando cun 0 se non hai comunicación e cun 1 se están comunicados. A fila é o punto de partida e a columna o de chegada

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.2 Operacións con matrices. Aplicacións

Cando a información atópase disposta en forma matricial, os resultados de operar con matrices poden dar lugar a novas informacións.

Exemplo 4.2.1: Un construtor opera en tres cidades: Madrid (M), Sevilla (S) e Valencia (V), e edifica pisos de dous tipos, A e B. O número de pisos construídos de cada tipo en cada cidade nos anos 2007 e 2008 veñen expresados polas matrices seguintes:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ S \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ S \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Calcula os pisos construídos durante os dous anos de cada tipo e en cada cidade.
b) Calcula os pisos que debe construír en 2009, para reducir a produción dos construídos en 2008 á metade.
c) Cada piso do tipo A leva 5 portas e 9 xanelas e os do tipo B teñen 3 portas e 7 xanelas. Cantas xanelas e portas se utilizaron en cada cidade para cubrir as necesidades das construcións do ano 2008?

Sexan P e Q as matrices asociadas ás construcións dos anos 2007 e 2008 respectivamente.

a) A matriz $P+Q$ informa dos pisos construídos entre os dous anos.
$$P+Q=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8+6 & 5+4 \\ 4+4 & 7+4 \\ 3+2 & 4+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 8 & 11 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
b) A matriz informa dos pisos para construír durante o ano 2009.
c) Disponse en forma matricial os números de portas P e de xanelas X, que precisan os dous modelos de pisos:
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} P & X \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para ver as portas e xanelas que se precisan nas construcións realizadas en Madrid durante o ano 2008 é necesario realizar as operacións seguintes: $6\cdot 5+4\cdot 3=42$ portas $6\cdot 9+4\cdot 7=82$ xanelas. Estes cálculos pódense realizar para as dúas cidades restantes pero quedan resumidos mediante o produto de matrices:
$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\cdot 5+4\cdot 3 & 6\cdot 9+4\cdot 7 \\ 4\cdot 5+4\cdot 3 & 4\cdot 9+4\cdot 7 \\ 2\cdot 5+2\cdot 3 & 2\cdot 9+2\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 42 & 82 \\ 32 & 64 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Licenzas das ilustracións

Ilustración	Recurso
Ilustración 1. Produto dunha matriz fila por unha matriz columna	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 2. Produto dunha matriz fila por unha matriz columna	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 3. Matrices A, A^2 e A^3	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 4. Grafo do exemplo 4.1.1	Autoría: Elaboración propia