Exercicios autoavaliables

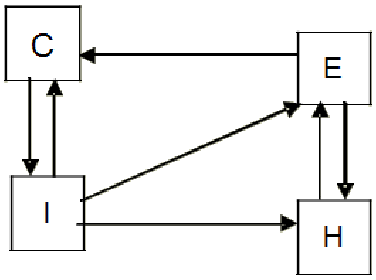
1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
   a. Cal é a súa dimensión?
   b. Indica o valor dos elementos a_{11}, a_{22} e a_{32}.
   c. Cal é a súa diagonal principal?
   d. Calcula $-A$.
   e. Calcula A^t. Cal é a súa dimensión?
2. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ y & 0 & z \end{pmatrix}$, indica os valores de x, y e z para que a matriz B sexa igual a A.
3. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:
   a. $A + B$
   b. $A - B$
   c. $2A - 3B + 4C$
   d. $A \cdot B$
   e. $B \cdot A$
   f. $A \cdot (B + C)$
4. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula:
   a. $A + 2B$
   b. $3A - B$
   c. $(A + B) \cdot C$
   d. $A \cdot C$
   e. $B \cdot C$
   f. $A \cdot C + B \cdot C$
5. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:
   a. A^t
   b. B^t
   c. $(A + B)^t$
   d. $(A + B + C)^t$
6. Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, A^4 e A^5. Calcula $A^n, n \in \mathbb{N}$, e utilízaa para calcular A^{20} e A^{130}.
7. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula as matrices A^2, A^3, A^4, A^5 e obtén razoadamente a matriz A^n para $n > 5$.
8. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ calcula:
   a. $(A + B)^2$
   b. $A^2 + 2AB + B^2$
   c. $(A + B)(A - B)$
   d. $A^2 - B^2$

   Despois comproba que as matrices dos apartados a e b e c e d non coinciden e razoa por que.
9. Encontra os números a e b para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = 2A$. Para estes valores de a e b, calcula A^{50}.
10. Acha os posibles valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que a matriz $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ satisfaga a ecuación matricial $X^2 = 2X$.
11. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ atopa unha matriz da forma $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ que verifique a ecuación $A \cdot X = X \cdot B$.

12. Calcula, polo método de Gauss, as inversas das matrices:
    a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ c. $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
13. Calcula as matrices inversas das matrices:
    a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
    b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
    c. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
14. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, acha a matriz X que satisfai a ecuación $A \cdot X = B \cdot A$.
15. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ acha X tal que $A \cdot X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
16. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ atopa unha matriz X que verifique a ecuación $A \cdot X + 3B + 2C = D$.
17. Nunha acería fabrícanse tres tipos de produtos: aceiro en láminas, en rolos ou aceiros especiais. Estes produtos requiren chatarra, carbón e aliaxes nas cantidades que se indican na táboa seguinte, por cada unidade de produto fabricado:

	Aceiro e láminas	**Aceiro en rolos**	**Aceiros especiais**
Chatarra	8	6	6
Carbón	4	6	4
Aliaxes	2	1	3

    a. Se durante o próximo mes deséxanse fabricar 6 unidades de aceiro en láminas, 4 unidades de aceiro en rolos e 3 unidades de aceiros especiais, obtén unha matriz que indique as cantidades de chatarra, carbón e aliaxes que serán necesarias.
    b. Se se dispón de 40 unidades de chatarra, 30 de carbón e 10 de aliaxes, cantas unidades de cada tipo de aceiro poderanse fabricar con estes materiais?
18. No grafo seguinte aparecen indicadas as comunicacións de catros puntos importantes dunha localidade; Concello: C, Estación de tren: E, Instituto de Secundaría: I e Hospital: H.
    a. Forma a matriz de información do grafo.
    b. Calcula o cadrado da matriz anterior e explica o seu significado.

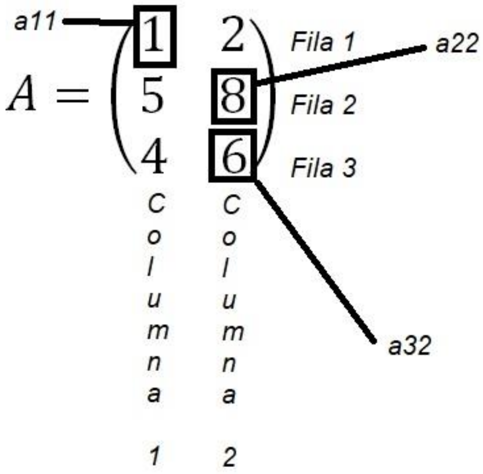


Solucións

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

   a. Cal é a súa dimensión?

   Ten 3 filas e 2 columnas, polo tanto, a súa dimensión é 3×2.

   b. Indica o valor dos elementos a_{11}, a_{22} e a_{32}.

   $a_{11} = 1, a_{22} = 8, a_{32} = 6.$

   c. Cal é a súa diagonal principal?

   Os elementos da diagonal principal son aqueles que están na mesma fila e columna. Neste caso son os elementos a_{11} *e* a_{22}.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

   d. Calcula $-A$.

   Para calcular a matriz oposta de A, $-A$, *cambiamos de signo todos os elementos de* A.

   $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow -\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -8 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

   e. Calcula A^t. Cal é a súa dimensión?

   Para calcular a matriz trasposta de A, A^{t}, *collemos as filas de* A *e as escribimos como columnas.*

   $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

   A dimensión de A *é* 3×2, *polo tanto, a de* A^{t} *é* 2×3.

2. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ y & 0 & z \end{pmatrix}$, indica os valores de x, y e z para que a matriz B sexa igual a A.

Para que ambas matrices sexan iguais todos os elementos teñen que coincidir. Os elementos a_{11}, a_{13} e a_{22} coinciden con b_{11}, b_{13} e b_{22}, respectivamente. Igualamos os elementos $a_{12},\ a_{21}$ e a_{23} a $b_{12},\ b_{21}$ e b_{23} e obtemos $x=-3, y=-7$ e $z=4$.

3. Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, calcula:

   a. $A+B$

   $$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 0+1\\ 2+0 & -1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

   b. $A-B$

   $$A-B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2 & 0-1\\ 2-0 & -1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

   c. $2A-3B+4C$

   $$2A-3B+4C=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}+(-3)\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}=$$
   $$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 0 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12 & 4\\ -8 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6+12 & 0-3+4\\ 4+0-8 & -2+9+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 1\\ -4 & 23\end{pmatrix}$$

   Nota: Ao calcula $-3B$ tamén poderíamos facer $-\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & -9\end{pmatrix}$.

   d. $A\cdot B$

   $$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot(-3)\\ 2\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 2\cdot 1+(-1)\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

   e. $B\cdot A$

   $$B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 0+1\cdot(-1)\\ 0\cdot 1+(-3)\cdot 2 & 0\cdot 0+(-3)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -6 & 3\end{pmatrix}$$

   f. $A\cdot(B+C)$

   Calculamos $B+C$:

   $$B+C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3 & 1+1\\ 0-2 & -3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$
   $$A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+0\cdot(-2) & 1\cdot 2+0\cdot 1\\ 2\cdot 5+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot 2+(-1)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 12 & 3\end{pmatrix}$$

4. Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, calcula:

   a. $A+2B$

   $$A+2B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2\cdot(-1) & 1+2\cdot 0 & 3+2\cdot 2\\ 2+2\cdot 0 & 4+2\cdot 4 & 0+2\cdot 3\end{pmatrix}=$$
   $$=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 7\\ 2 & 12 & 6\end{pmatrix}$$

   b. $3A-B$

   $$3A-B=3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)-(-1) & 3\cdot 1-0 & 3\cdot 3-2\\ 3\cdot 2-0 & 3\cdot 4-4 & 3\cdot 0-3\end{pmatrix}=$$
   $$=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 7\\ 6 & 8 & -3\end{pmatrix}$$

   c. $(A+B)\cdot C$

En primeiro lugar calculamos $A+B$:

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-1 & 1+0 & 3+2\\ 2+0 & 4+4 & 0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 2 & 8 & 3\end{pmatrix}$$

Agora multiplicamos o resultado por C.

$$(A+B)\cdot C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 2 & 8 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot 2+1\cdot 0+5\cdot 1 & -2\cdot 1+1\cdot 2+5\cdot 3 & -2\cdot 4+1\cdot(-1)+5\cdot 0\\ 2\cdot 2+8\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot 1+8\cdot 2+3\cdot 3 & 2\cdot 4+8\cdot(-1)+3\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 15 & -9\\ 7 & 27 & 0\end{pmatrix}$$

d. $A\cdot C$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 2+1\cdot 0+3\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot 2+3\cdot 3 & -1\cdot 4+1\cdot(-1)+3\cdot 0\\ 2\cdot 2+4\cdot 0+0\cdot 1 & 2\cdot 1+4\cdot 2+0\cdot 3 & 2\cdot 4+4\cdot(-1)+0\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 10 & -5\\ 4 & 10 & 4\end{pmatrix}$$

e. $B\cdot C$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot 1 & -1\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 3 & -1\cdot 4+0\cdot(-1)+2\cdot 0\\ 0\cdot 2+4\cdot 0+3\cdot 1 & 0\cdot 1+4\cdot 2+3\cdot 3 & 0\cdot 4+4\cdot(-1)+3\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ 3 & 17 & -4\end{pmatrix}$$

f. $A\cdot C+B\cdot C$

Como nos apartados d e e xa calculamos $A\cdot C$ e $B\cdot C$, respectivamente, só temos que sumar ditas matrices.

$$A\cdot C+B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 10 & -5\\ 4 & 10 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ 3 & 17 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 10+5 & -5-4\\ 4+3 & 10+17 & 4-4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 15 & -9\\ 7 & 27 & 0\end{pmatrix}$$

5. Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, calcula:

a. A^t

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

b. B^t

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}\rightarrow B^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

c. $(A+B)^t$

Primeiro calculamos $A+B$ e despois traspoñemos.

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&0+1\\2+0&-1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\2&-4\end{pmatrix}\to(A+B)^t=\begin{pmatrix}3&2\\1&-4\end{pmatrix}$$

d. $(A+B+C)^t$

$$A+B+C=(A+B)+C=\begin{pmatrix}3&1\\2&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+3&1+1\\2-2&-4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2\\0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\to(A+B+C)^t=\begin{pmatrix}6&0\\2&0\end{pmatrix}$$

6. Dada $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, A^4 e A^5. Calcula $A^n, n\in\mathbb{N}$, e utilízaa para calcular A^{20} e A^{130}.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot(-1)&0\cdot1+1\cdot0\\-1\cdot0+0\cdot(-1)&-1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot0+0\cdot(-1)&-1\cdot1+0\cdot0\\0\cdot0+(-1)\cdot(-1)&0\cdot1+(-1)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0+(-1)\cdot(-1)&0\cdot1+(-1)\cdot0\\1\cdot0+0\cdot(-1)&1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

$$A^5=A^4\cdot A=I\cdot A=A$$

Polo tanto,

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, A^4=I_2\ e\ A^5=A.$$

Deducimos que:

- *Se* $n=1+4k, k\in\mathbb{N}$, *é dicir, se* $n=\{1,5,9,13,17,\dots\}$, $A^n=A$
- *Se* $n=2+4k, k\in\mathbb{N}$, *é dicir, se* $n=\{2,6,10,14,18,\dots\}$, $A^n=A^2$
- *Se* $n=3+4k, k\in\mathbb{N}$, *é dicir, se* $n=\{3,7,11,15,19,\dots\}$, $A^n=A^3$
- *Se* $n=4+4k, k\in\mathbb{N}$, *é dicir, se* $n=\{4,8,12,16,20,\dots\}$, $A^n=A^4=I_2$

$$A^n=\begin{cases}A, se\ n=1+4k, k\in\mathbb{N}\\A^2, se\ n=2+4k, k\in\mathbb{N}\\A^3, se\ n=3+4k, k\in\mathbb{N}\\I_2, se\ n=4+4k, k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Entón, $A^{20}=I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. *Ademais,*

$$\begin{array}{rrr|l}1&3&0&4\\\hline &1&0&32\\&&\underbrace{2}&\end{array}$$

Logo, $A^{130}=A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $(A^{130}=A^{4\cdot32+2}=(A^4)^{32}\cdot A^2=I^{32}\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2)$

7. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula as matrices A^2, A^3, A^4, A^5 e obtén razoadamente a matriz A^n para $n > 5$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0)$$

Se $n > 5, A^n = (0)$ *porque* $A^n = A^{n+\overbrace{5-5}^{0}} = A^{5+n-5} = A^5 \cdot A^{n-5} = (0) \cdot A^{n-5} = (0)$

8. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ calcula:

   a. $(A+B)^2$

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B)$$

Calculamos $A + B$*:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 \\ 2+0 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Entón,

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 1 + (-4) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -2 & 18 \end{pmatrix}$$

   b. $A^2 + 2AB + B^2$

Calculamos as matrices $A^2, 2AB$ *e* B^2 *e despois as sumamos:*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2AB = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}^{2A} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}^{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$$

   c. $(A+B)(A-B)$

Calculamos $A-B$ e despois multiplicámola por $A+B$ (que xa foi calculada no apartado a):

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2&0-1\\2-0&-1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix}$$

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}3&1\\2&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)+1\cdot 2&3\cdot(-1)+1\cdot 2\\2\cdot(-1)+(-4)\cdot 2&2\cdot(-1)+(-4)\cdot 2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-1&-1\\-10&-10\end{pmatrix}$$

d. A^2-B^2

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$*(apartado b)*

$B^2=\begin{pmatrix}4&-1\\0&9\end{pmatrix}$*(apartado b)*

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-1\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4&0-(-1)\\0-0&1-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1\\0&-8\end{pmatrix}$$

Despois comproba que as matrices dos apartados a e b e c e d non coinciden e razoa por que.

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}11&-1\\-2&18\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}9&1\\8&20\end{pmatrix}=A^2+2AB+B^2$$

Débese a que $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ e como $AB\neq BA$ (porque o produto de matrices non é en xeral conmutativo) $AB+BA\neq 2AB$.

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}-1&-1\\-10&-10\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-3&1\\0&-8\end{pmatrix}=A^2-B^2$$

A razón polo que non coinciden é que

$$(A+B)\cdot(A-B)=A\cdot A-A\cdot B+B\cdot A-B\cdot B=A^2-AB+BA-B^2.$$

Como $AB\neq BA, -AB+BA\neq 0,$ entón $A^2-AB+BA-B^2\neq A^2-B^2$.

9. Encontra os números a e b para que a matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}$ verifique $A^2=2A$. Para estes valores de a e b, calcula A^{50}.

Calculamos A^2 e $2A$:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot a&1\cdot1+1\cdot b\\a\cdot1+b\cdot a&a\cdot1+b\cdot b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a&1+b\\a+ab&a+b^2\end{pmatrix}$$

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2a&2b\end{pmatrix}$$

Igualamos ditas matrices:

$$\begin{pmatrix}1+a&1+b\\a+ab&a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2a&2b\end{pmatrix}$$

Comparando elemento a elemento, obtemos as seguintes ecuacións:

$$\begin{cases} 1+a=2 \rightarrow a=1 \\ 1+b=2 \rightarrow b=1 \\ a+ab=2a \\ a+b^2=2b \end{cases}$$

Comprobamos que os resultados obtidos, ao resolver as ecuacións 1 e 2, cumpren as ecuacións 3 e 4:

- *Ecuación 3:* $1+1\cdot 1=2\cdot 1 \rightarrow 2=2$
- *Ecuación 4:* $1+1^2=2\cdot 1 \rightarrow 2=2$

Como verifican as dúas ecuacións, concluímos que $a=1$ *e* $b=1$*. Entón,*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular A^{50}*, calculamos as primeiras potencias, ata ser capaces de deducir o patrón que seguen.*

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 1 \\ 1\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+2\cdot 1 & 2\cdot 1+2\cdot 1 \\ 2\cdot 1+2\cdot 1 & 2\cdot 1+2\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot 1+4\cdot 1 & 4\cdot 1+4\cdot 1 \\ 4\cdot 1+4\cdot 1 & 4\cdot 1+4\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Observamos que en todas as potencias, os 4 elementos son iguais e, ademais, son as sucesivas potencias de 2:

$$A=\begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 \\ 2^1 & 2^1 \end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix} \text{ e } A^4=\begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Como o expoñente dos elementos das matrices é sempre una unidade menor que o expoñente da matriz, deducimos que en xeral:

$$A^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix},\ n\in\mathbb{N}$$

E, en particular,

$$A^{50}=\begin{pmatrix} 2^{49} & 2^{49} \\ 2^{49} & 2^{49} \end{pmatrix}$$

10. Acha os posibles valores de $a, b,\ c\in\mathbb{R}$ para que a matriz $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ satisfaga a ecuación matricial $X^2=2X$.

Calculamos X^2 *e* $2X$*:*

$$X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cdot a+0\cdot b & a\cdot 0+0\cdot c \\ b\cdot a+c\cdot b & b\cdot 0+c\cdot c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{pmatrix}$$

$$2X=2\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

Igualamos ditas matrices:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

Comparando elemento a elemento, obtemos as seguintes ecuacións:

$$\begin{cases} a^2 = 2a \\ 0 = 0 \\ ab + bc = 2b \\ c^2 = 2c \end{cases}$$

Resolvemos a 1ª e a 4ª ecuación, xa que son ecuacións cunha única incógnita. Despois utilizamos os resultados para resolver a 3ª.

$$a^2 = 2a \to a^2 - 2a = 0 \xrightarrow[\ ]{\substack{Extraemos \\ factor\ común}} a(a-2) = 0 \to \begin{cases} a = 0 \\ a - 2 = 0 \to a = 2 \end{cases}$$

$$c^2 = 2c \to c^2 - 2c = 0 \xrightarrow[\ ]{\substack{Extraemos \\ factor\ común}} c(c-2) = 0 \to \begin{cases} c = 0 \\ c - 2 = 0 \to c = 2 \end{cases}$$

- Se $a = 0$ e $c = 0 \to 0 = 2b \to b = 0$
- Se $a = 0$ e $c = 2 \to 2b = 2b \to b$ pode tomar calquera valor
- Se $a = 2$ e $c = 0 \to 2b = 2b \to b$ pode tomar calquera valor
- Se $a = 2$ e $c = 2 \to 4b = 2b \to 2b = 0 \to b = 0$

Solucións: $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ e $X_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $b \in \mathbb{R}$.

11. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ atopa unha matriz da forma $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ que verifique a ecuación $A \cdot X = X \cdot B$.

Calculamos $A \cdot X$ *e* $X \cdot B$*:*

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 1 - 1 \cdot x & -4 \cdot 1 - 1 \cdot y \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot x & 4 \cdot 1 + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - x & -4 - y \\ 4 + x & 4 + y \end{pmatrix}$$

$$X \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \\ x \cdot 1 + y \cdot (-2) & x \cdot 2 + y \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ x - 2y & 2x - 4y \end{pmatrix}$$

Igualámolas:

$$\begin{pmatrix} -4 - x & -4 - y \\ 4 + x & 4 + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ x - 2y & 2x - 4y \end{pmatrix}$$

E obtemos as seguintes ecuacións:

$$\begin{cases} -4 - x = -1 \\ -4 - y = -2 \\ 4 + x = x - 2y \\ 4 + y = 2x - 4y \end{cases}$$

Resolvemos as dúas primeiras ecuacións e, despois, substituímos os resultados na 3ª e na 4ª ecuación para comprobar que tamén as verifican.

$$-4 - x = -1 \rightarrow -4 + 1 = x \rightarrow x = -3$$

$$-4 - y = -2 \rightarrow -4 + 2 = y \rightarrow y = -2$$

3ª ecuación: $4 - 3 = -3 - 2 \cdot (-2) \rightarrow 1 = 1$

4ª ecuación: $4 - 2 = 2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-2) \rightarrow 2 = 2$

Podemos afirmar, entón, que $x = -3$ *e* $y = -2$*. Polo tanto,*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

12. Calcula, polo método de Gauss, as inversas das matrices:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Recordemos que, para calcular a inversa mediante o método de Gauss, aplicaremos transformacións ata que a convertamos na identidade. Esas mesmas transformacións, aplicaranse á identidade e, a matriz obtida, será a inversa de A*.*

Recoméndase transformar primeiro a fila 2 e despois a fila 1.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{(A|I)} \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2} \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)}^{(I|A^{-1})}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a. $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{(B|I)} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2}$$

$$\rightarrow \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)}^{(I|B^{-1})}$$

Solución:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nota: Poderíamos ter aforrado a 1ª transformación e directamente facer $F_2 - \frac{1}{2}F_1$*.*

b. $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{(C|I)} \xrightarrow{F_2-\frac{3}{4}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -3/4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2\cdot F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot F_1} \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \end{array}\right)}^{(I|C^{-1})}$$

Solución:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Nota: se nos resulta complicado pensar que transformación realizar, podemos pensalo como unha ecuación. Por exemplo, na primeira transformación queremos sumarlle á F_2 a F_1 multiplicada por un número (x) de tal forma que 3 pase a ser 0, é dicir:

$$F_2 + x \cdot F_1 = 0 \rightarrow 3 + x \cdot 4 = 0 \rightarrow 4x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Polo tanto, a transformación que debemos realizar é $F_2 - \frac{3}{4}F_1$

13. Calcula as matrices inversas das matrices:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{(A|I)} \xrightarrow{\overbrace{F_2 \leftrightarrow F_3}^{(1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)}^{(I|A^{-1})}$$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nota: É recomendable aplicar a transformación (1) porque a 3ª fila de A coincide ca segunda da identidade; xa non habería que aplicar ningunha outra transformación sobre ela. Sería posible calcular a inversa aplicando outras transformacións, pero realizaríanse máis operacións.

a. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{(B|I)} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - \frac{5}{4F_2}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -2 & -\frac{5}{4} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-4 \cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + 3F_3]{F_2 - 5F_3}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&25&15&-12\\0&4&0&-40&-24&20\\0&0&1&8&5&-4\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{4}F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&25&15&-12\\0&1&0&-10&-6&5\\0&0&1&8&5&-4\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+2F_2}$$

$$\rightarrow\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&3&-2\\0&1&0&-10&-6&5\\0&0&1&8&5&-4\end{array}\right)}^{(I|B^{-1})}$$

Solución: $B^{-1}=\begin{pmatrix}5&3&-2\\-10&-6&5\\8&5&-4\end{pmatrix}$

b. $C=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\0&3&1&0&0&1\end{array}\right)}^{(C|I)}\xrightarrow{F_2-2F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&-1&-3&-2&1&0\\0&3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+3F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&-1&-3&-2&1&0\\0&0&-8&-6&3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{8}F_3]{-F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&3&2&-1&0\\0&0&1&3/4&-3/8&-1/8\end{array}\right)\xrightarrow[F_1-2F_3]{F_2-3F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-1/2&3/4&1/4\\0&1&0&-1/4&1/8&3/8\\0&0&1&3/4&-3/8&-1/8\end{array}\right)\xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\rightarrow\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/4&5/8&-1/8\\0&1&0&-1/4&1/8&3/8\\0&0&1&3/4&-3/8&-1/8\end{array}\right)}^{(I|C^{-1})}$$

Solución: $C^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{5}{8}&-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\\frac{3}{4}&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\end{pmatrix}$

Nota: Podemos facer os cálculos ca calculadora, utilizando a tecla $a\,{}^{b}/_{c}$. *Por exemplo,* $\frac{1}{4}-\frac{3}{8}$ *calculase introducindo* $1\,\boxed{a\,{}^{b}/_{c}}\,4-3\,\boxed{a\,{}^{b}/_{c}}\,8\,\boxed{=}$.

14. Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&2\\-1&0&2\end{pmatrix}$, acha a matriz X que satisfai a ecuación $A\cdot X=B\cdot A$.

Despexamos X na ecuación:

$$A\cdot X=B\cdot A\xrightarrow[esquerda]{\times A^{-1}\ pola}A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot(B\cdot A)\rightarrow\overbrace{(A^{-1}\cdot A)}^{I}\cdot X=(A^{-1}\cdot B)\cdot A\rightarrow$$
$$\rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot A$$

Calculamos A^{-1}:

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\-1&0&1&0&0&1\end{array}\right)}^{(A|I)}\xrightarrow{F_3+F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&3&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1/3&0&1/3\end{array}\right)\xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-2F_3}$$

$$\rightarrow \overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)}^{(I|A^{-1})}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -5/3 \\ 4/3 & -1/3 & 5/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}^{A^{-1} \cdot B} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} = \begin{pmatrix} 7/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 4 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 7/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 4 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

15. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ acha X tal que $A \cdot X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Chamamos $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *e despexamos* X *na ecuación.*

$$A \cdot X \cdot A = B \xrightarrow{\substack{Multiplicamos\ por \\ A^{-1}\ pola\ esquerda\ e \\ pola\ dereita}} A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot A) \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} \rightarrow$$

$$\overbrace{(A^{-1} \cdot A)}^{I} \cdot X \cdot \overbrace{(A \cdot A^{-1})}^{I} = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}*:*

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{(A|I)} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1}$$

$$\rightarrow \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)}^{(I|A^{-1})}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}}^{A^{-1}B} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}^{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 26 & 46 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} 26 & 46 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$$

16. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ atopa unha matriz X que verifique a ecuación $A \cdot X + 3B + 2C = D$.

Despexamos X *na ecuación:*

$$A \cdot X + 3B + 2C = D \rightarrow A \cdot X = D - 3B - 2C \xrightarrow{\substack{\times A^{-1}\ pola \\ esquerda}} \overbrace{(A^{-1} \cdot A)}^{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (D - 3B - 2C) \rightarrow$$

$$X = A^{-1} \cdot (D - 3B - 2C)$$

Calculamos $D - 3B - 2C$ e A^{-1}:

$$D - 3B - 2C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - 3 + 0 & 1 - 6 - 6 \\ -3 + 3 - 2 & 6 - 9 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{(A|I)} \xrightarrow{F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1}$$

$$\rightarrow \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right)}^{(I|A^{-1})}$$

Entón,

$$X = \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \cdot 1 + 1/5 \cdot (-2) & -3/5 \cdot (-11) + 1/5 \cdot (-3) \\ 2/5 \cdot 1 + 1/5 \cdot (-2) & 2/5 \cdot (-11) + 1/5 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

17. Nunha acería fabrícanse tres tipos de produtos: aceiro en láminas, en rolos ou aceiros especiais. Estes produtos requiren chatarra, carbón e aliaxes nas cantidades que se indican na táboa seguinte, por cada unidade de produto fabricado:

	Aceiro e láminas	**Aceiro en rolos**	**Aceiros especiais**
Chatarra	8	6	6
Carbón	4	6	4
Aliaxes	2	1	3

Da táboa obtemos a matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a. Se durante o próximo mes deséxanse fabricar 6 unidades de aceiro en láminas, 4 unidades de aceiro en rolos e 3 unidades de aceiros especiais, obtén unha matriz que indique as cantidades de chatarra, carbón e aliaxes que serán necesarias.

Para fabricar 6 unidades de aceiro en láminas precisamos $6 \cdot 8$ de chatarra, $6 \cdot 4$ de carbón e $6 \cdot 2$ aliaxes. De igual xeito obteríamos as unidades necesarias para o aceiro en rolos e para os aceiros especiais e sumaríamos as cantidades de chatarra, carbón e aliaxes para obter o total.

Unha forma máis directa de resolver este problema é utilizando matrices.

Os datos do enunciado dan a matriz de produción $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

O produto $A \cdot P$ é a matriz de materiais que se precisan para a produción desexada.

$$A\cdot P=\begin{pmatrix}8&6&6\\4&6&4\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot6+6\cdot4+6\cdot3\\4\cdot6+6\cdot4+4\cdot3\\2\cdot6+1\cdot4+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}90\\60\\25\end{pmatrix}\begin{matrix}Chatarra\\Carbón\\Aliaxes\end{matrix}$$

b. Se se dispón de 40 unidades de chatarra, 30 de carbón e 10 de aliaxes, cantas unidades de cada tipo de aceiro poderanse fabricar con estes materiais?

Sexan $E=\begin{pmatrix}40\\30\\10\end{pmatrix}$ *a matriz de existencias e* $P'=\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\\\mathrm{z}\end{pmatrix}$ *a matriz de produción que se pode realizar a partir de* E*. Logo,*

$$A\cdot P'=E$$

Despexamos P' *na ecuación, multiplicando por* A^{-1} *pola esquerda:*

$$\mathrm{A}^{-1}\cdot(\mathrm{A}\cdot\mathrm{P}')=\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{E}\rightarrow\overbrace{(\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{A})}^{\mathrm{I}}\cdot\mathrm{P}'=\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{P}'=\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{E}$$

Calculamos A^{-1}*:*

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}8&6&6&1&0&0\\4&6&4&0&1&0\\2&1&3&0&0&1\end{array}\right)}^{(A|I)}\xrightarrow{F_3\leftrightarrow F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&0&0&1\\4&6&4&0&1&0\\8&6&6&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-2F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&0&0&1\\0&4&-2&0&1&-2\\0&2&-6&1&0&-4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&0&0&1\\0&2&-6&1&0&-4\\0&4&-2&0&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-2F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&0&0&1\\0&2&-6&1&0&-4\\0&0&10&-2&1&6\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{10}F_3}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&0&0&1\\0&2&-6&1&0&-4\\0&0&1&-1/5&1/10&3/5\end{array}\right)\xrightarrow[F_1-3F_3]{F_2+6F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&3/5&-3/10&-4/5\\0&2&0&-1/5&3/5&-2/5\\0&0&1&-1/5&1/10&3/5\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2}$$

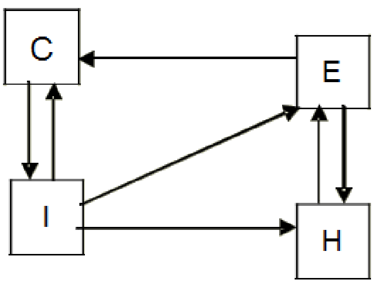
$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&3/5&-3/10&-4/5\\0&1&0&-1/10&3/10&-1/5\\0&0&1&-1/5&1/10&3/5\end{array}\right)\xrightarrow{F_1-F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&7/10&-3/5&-3/5\\0&1&0&-1/10&3/10&-1/5\\0&0&1&-1/5&1/10&3/5\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}F_1}$$

$$\rightarrow\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7/20&-3/10&-3/10\\0&1&0&-1/10&3/10&-1/5\\0&0&1&-1/5&1/10&3/5\end{array}\right)}^{(I|A^{-1})}$$

Entón:

$$P'=\begin{pmatrix}\frac{7}{20}&-3/10&-3/10\\-1/10&3/10&-1/5\\-1/5&1/10&3/5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}40\\30\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{20}\cdot40-\frac{3}{10}\cdot30-\frac{3}{10}\cdot10\\-\frac{1}{10}\cdot40+\frac{3}{10}\cdot30-\frac{1}{5}\cdot10\\-\frac{1}{5}\cdot40+\frac{1}{10}\cdot30+\frac{3}{5}\cdot10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$$

18. No grafo seguinte aparecen indicadas as comunicacións de catros puntos importantes dunha localidade; Concello: C, Estación de tren: E, Instituto de Secundaría: I e Hospital: H.



a. Forma a matriz de información do grafo.

Consideramos a fila como o punto de partida e a columna como o punto de chegada:

$$\begin{array}{c} \\ C \\ E \\ H \\ I \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C & E & H & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. Calcula o cadrado da matriz anterior e explica o seu significado.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

O cadrado da matriz indica as diferentes formas de unir dous puntos da cidade pasando por un punto intermedio. Por exemplo, o elemento $a_{42} = 1$ indica que se pode ir do Instituto á Estación pasando por un punto intermedio dunha forma, neste caso: $\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{E}$.