MATRICES

Exercicios autoavaliables

1. Calcula os posibles valores de a, b, $c \in \mathbb{R}$ para que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique a relación $(A - 2I)^2 = 0$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e 0 a matriz nula de orde 2.
2. Sexa M unha matriz cadrada de orde 2 tal que $M^2 = 4M$. Determina a matriz X que verifica a ecuación matricial $(M - 2I)^2 X = I$, sendo I a matriz identidade de orde 2.
3. Sexa $B = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula x e y para que se cumpra que $B^{-1} = B^t$.
4. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos os valores de a e b para os que $A^{-1} = A^t$.
5. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, acha dúas matrices X e Y que verifican:
$$\begin{cases} X + Y^{-1} = A \\ X - Y^{-1} = A^t \end{cases}$$
6. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^3 e A^{25}.
7. Sexan A, B e C tres matrices tales que o produto $A \cdot B \cdot C$ é unha matriz $3x2$ e o produto $A \cdot C^t$ é unha matriz cadrada. Calcula, razoando a resposta, as dimensións de A, B e C.
8. Dada $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas as matrices X que conmutan con M, é dicir, que verifican $X \cdot M = M \cdot X$. Da un exemplo concreto de matriz que verifique dita igualdade.
9. Resolve a ecuación matricial $A \cdot X + C = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Solucións

1. Calcula os posibles valores de a, b, $c \in \mathbb{R}$ para que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique a relación $(A - 2I)^2 = 0$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e 0 a matriz nula de orde 2.

   Calculamos $A - 2I$ e despois $(A-2I)^2$:

   $$A - 2I = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix}$$
   $$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-2)^2 & (a-2)\cdot b + b \cdot (c-2) \\ 0 & (c-2)^2 \end{pmatrix} =$$
   $$= \begin{pmatrix} (a-2)^2 & ab - 4b + bc \\ 0 & (c-2)^2 \end{pmatrix}$$

   Igualamos $(A-2I)^2$ á matriz 0.

   $$\begin{pmatrix} (a-2)^2 & ab - 4b + bc \\ 0 & (c-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   E comparando elemento a elemento obtemos as seguintes ecuacións:

   $$\begin{cases} (a-2)^2 = 0 \to \boxed{a = 2} \\ ab - 4b + bc = 0 \to 2b - 4b + 2b = 0 \to 0 = 0 \to b \text{ pode tomar calquera valor} \\ (c-2)^2 = 0 \to \boxed{c = 2} \end{cases}$$

   Solución: $A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$.

2. Sexa M unha matriz cadrada de orde 2 tal que $M^2 = 4M$. Determina a matriz X que verifica a ecuación matricial $(M - 2I)^2 X = I$, sendo I a matriz identidade de orde 2.

   Calculamos en primeiro lugar a matriz $(M-2I)^2$:

   $$(M-2I)^2 = (M-2I)\cdot(M-2I) = M^2 - \overbrace{2IM}^{2M} - \overbrace{M2I}^{2M} + 4I = \overbrace{M^2}^{4M} - 4M + 4I = 4M - 4M + 4I = 4I$$

   Entón,

   $$(M-2I)^2 \cdot X = I \xrightarrow{(M-2I)^2 = 4I} 4I \cdot X = I \to 4 \cdot X = I \to X = \frac{1}{4} I \to X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3. Sexa $B = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula x e y para que se cumpra que $B^{-1} = B^t$.

   Se $B^{-1} = B^t$, verifícase que $B \cdot B^t = I$. Calculamos $B \cdot B^t$:

   $$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & y & 0 \\ x & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + x^2 & -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x & 0 \\ -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x & y^2 + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Igualamos $B \cdot B^t$ a I:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}+x^2 & -\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x & 0 \\ -\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x & y^2+\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparamos elemento a elemento e obtemos as seguintes ecuacións:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}+x^2 = 1 \to x^2 = \frac{3}{4} \to \boxed{x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ -\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x = 0 \to y = x \\ y^2+\frac{1}{4} = 1 \to y^2 = \frac{3}{4} \to \boxed{y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$$

Da ecuación 2 deducimos que x e y teñen que coincidir. Entón, as solucións son $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. E, polo tanto, as posibles matrices son:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos os valores de a e b para os que $A^{-1} = A^t$.

Se $A^{-1} = A^t$, verifícase que $A \cdot A^t = I$. Calculamos $A \cdot A^t$ e igualamos a I:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comparando elemento a elemento obtemos as seguintes ecuacións:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \to a = \pm\sqrt{1} \to \ a = \pm 1 \\ ab = 0 \\ b^2+1 = 1 \to b^2 = 0 \to \ b = 0 \end{cases}$$

Solución: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ *e* $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, acha dúas matrices X e Y que verifican:

$$\begin{cases} X + Y^{-1} = A \\ X - Y^{-1} = A^t \end{cases}$$

Resolvemos o sistema por redución:

$$\begin{cases} X + Y^{-1} = A \\ X - Y^{-1} = A^t \end{cases} \xrightarrow{sumamos} 2X = A + A^t \to X = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

Calculamos $A + A^t$:

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Entón,

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Despexando Y^{-1} na 1ª ecuación obtemos:

$$Y^{-1} = A - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-3/2 \\ 2-3/2 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular Y, temos en conta que $(Y^{-1})^{-1} = Y$.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{(Y^{-1}|I)} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_2]{2\cdot F_1} \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)}^{(I|Y)}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^3 e A^{25}.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -A^2$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^7 = A^6 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^8 = A^7 \cdot A = A \cdot A = A^2$$

...

Observamos que a partir de A^6 repítense.

$$\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \hline \underbrace{1} & 4 \end{array}$$

Polo tanto, $A^{25} = A^1 = A$ (*porque* $A^{25} = A^{6\cdot 4+1} = (A^6)^4 \cdot A = I^4 \cdot A = I \cdot A = A$)

7. Sexan A, B e C tres matrices tales que o produto $A \cdot B \cdot C$ é unha matriz $3x2$ e o produto $A \cdot C^t$ é unha matriz cadrada. Calcula, razoando a resposta, as dimensións de A, B e C.

Se $A \cdot B \cdot C$ é unha matriz $3x2$, sabemos que A é unha matriz con 3 filas e que C é unha matriz con 2 columnas. Xa que, para poder multiplicalas e obter unha matriz de dimensión 3×2, ten que verificarse que:

$$\overbrace{3 \times n}^{A}\ \overbrace{n \times p}^{B}\ \overbrace{p \times 2}^{C} \longrightarrow 3 \times 2$$

Por outra banda, se C ten dimensións $p \times 2$, C^t ten dimensións $2 \times p$. Entón para poder facer o produto $A \cdot C^t$, ten que verificarse que as columnas de A coincidan cas filas de C^t, entón ten dimensión 3×2.

Ademais, $A \cdot C^t$ é unha matriz cadrada. Como sabemos que a súa dimensión vén dada por:

$$\overbrace{3 \times \cancel{2}}^{A}\ \overbrace{\cancel{2} \times p}^{C^t} \longrightarrow \overbrace{3 \times p}^{A\cdot C^t}$$

Deducimos que a matriz $A \cdot C^t$ é de orde 3, é dicir, $p = 3$.

Solución: $A_{3\times 2}, B_{2\times 3}$ e $C_{3\times 2}$.

8. Dada $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas as matrices X que conmutan con M, é dicir, que verifican $X \cdot M = M \cdot X$. Da un exemplo concreto de matriz que verifique dita igualdade.

Para que existan os produtos $X \cdot M$ e $M \cdot X$, X ten que ser de orde 2.

Supoñemos que X é a matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$X \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix}$$

$$M \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & \mathrm{b}-d \end{pmatrix}$$

Igualamos as matrices:

$$\begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & \mathrm{b}-d \end{pmatrix}$$

Se comparamos elemento a elemento obtemos as seguintes ecuacións:

$$\begin{cases} -a+b = -a \\ -b = -b \\ -c+d = a-c \\ -d = -d \end{cases}$$

A 2ª e a 4ª ecuacións non aportan información, sempre son certas. Resolvemos as outras dúas:

$$E_1 : -a+b = -a \rightarrow b = 0$$

$$E_3 : -c+d = a-c \rightarrow d = a$$

O sistema ten infinitas solucións. A matriz X é da forma $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{R}$.

Exemplo: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$(se tomamos $a = 1$ e $c = 2$; servirían outros números calquera).

9. Resolve a ecuación matricial $A \cdot X + C = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Despexamos X:

$A \cdot X = B - C \xrightarrow[esquerda]{\times A^{-1}\ pola} A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot (B - C) \rightarrow \overbrace{(A^{-1} \cdot A)}^{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (B - C) \rightarrow$
$\rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - C)$

Calculamos A^{-1} *e* $B - C$*:*

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}^{(A|I)} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + 4F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-1F_1} \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)}^{(I|A^{-1})}$$

$$B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Entón,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$