MATRICES

1. Definición de matriz

Chámase matriz de orde m x n a unha disposición en táboa rectangular de m x n números reais dispostos en m filas e n columnas. Denotaremos as matrices mediante letra maiúsculas: A, B, C,...

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Aos números reais a_{ij} chámaselles elementos da matriz. O primeiro subíndice i indica a fila e o segundo j a columna na que se atopa o elemento a_{ij}. Por exemplo, o elemento a_{32} atópase na terceira fila e segunda columna. O número de filas e de columnas danos a dimensión da matriz. Para indicar a dimensión da matriz indicaremos o número de filas e despois o de columnas separadas polo signo x así por $m\,x\,n$. Se o número de filas é igual a columnas, trátase dunha matriz cadrada de orde n.

<u>Exemplo</u>

Dada a matriz $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{4} & 5 & 0 \\ 1 & -3 & \sqrt{2} & 6 \\ -4 & 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ cal é a súa dimensión? E cales son os valores de a_{13} e a_{23}

É unha matriz de dimensión 3 x 4 (tres filas e catro columnas).

Os valores de $a_{13} = 5$ e $a_{23} = \sqrt{2}$

1.1 Igualdade de matrices

Dúas matrices *A* e *B* son iguais se teñen a mesma dimensión (ou a mesma orde, se son cadradas) e ademais son iguais todos os elementos que ocupan o mesmo lugar

<u>Exemplo</u>

As matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{9} & -5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{6}{3} & 3 & c \\ 2 & d & 6 \end{pmatrix}$ serán iguais?

Son iguais se a = 2, b = 6, c = –5 e d = 0

1.2 Matriz oposta e matriz trasposta

Matriz oposta dunha matriz A é aquela que ten por elementos os opostos de A. Represéntase por$-A$.

Matriz trasposta dunha matriz A é aquela que resulta ao escribir as filas de A como columnas. Represéntase por A^t

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ a súa oposta é a matriz $-A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

E a súa trasposta $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

1.3 Algúns tipos de matrices

Matriz rectangular é aquela matriz na que o número de filas é distinto ao de columnas m ≠ n.

Matriz cadrada é aquela na que o número de filas é igual ao de columnas m = n.

Exemplos

Matriz rectangular: A = $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ Matriz cadrada: B = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

Nunha matriz cadrada chámase **diagonal principal** ao conxunto dos elementos da forma a_{ii}. Na matriz B, a diagonal principal fórmana os elementos –2, 3, –8.
Nunha matriz cadrada chámase diagonal secundaria ao conxunto dos elementos a_{ij}con $i + j = n + 1$. Na matriz B, a diagonal secundaria fórmana os elementos 7, 3, 0; os seus subíndices suman 4.

Matriz fila é unha matriz que ten unha fila; polo tanto, de dimensión 1 x n. Matriz columna é unha matriz que ten unha columna; polo tanto, de dimensión
m x 1.

Exemplos

A = $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ é unha matriz columna de dimensión 3 x 1

B = (–1 4 5 0) é unha matriz fila de dimensión 1 x 4

Entre as matrices cadradas pode falarse de:

Matriz simétrica é unha matriz que coincide coa súa trasposta, $A = A^t$ ou ben $a_{ij} = a_{ji}$.

Matriz antisimétrica é unha matriz onde a súa trasposta coincide coa súa negativa, $-A = A^t$ ou ben $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemplo

As matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ son matrices simétricas.

E as matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -4 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices antisimétricas

Os elementos da diagonal principal dunha matriz antisimétrica cumpren $a_{ii} = -a_{ii}$; é dicir, son números que coinciden cos seus opostos, polo tanto nulos.

Matriz nula é a que ten todos os seus elementos nulos. Denotarase por O = (0)

Matriz diagonal é unha matriz cadrada que ten nulos todos os elementos que non pertencen á diagonal principal.

Matriz escalar é unha matriz diagonal na que todos os elementos da diagonal son iguais.

Matriz unidade ou identidade é unha matriz escalar na que os elementos da diagonal principal son uns.

Exemplos

As seguintes matrices son nulas: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

As seguintes matrices son diagonais: A = $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

As seguintes matrices son escalares: A = $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

As matrices I_2 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e I_3 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices identidade de orde dúas e tres respectivamente.

Matriz triangular é unha matriz cadrada na que todos os elementos situados por debaixo ou por encima, da diagonal principal son cero.

Exemplo

As matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ son matrices triangulares.

2. Operacións coas matrices

Ao conxunto de todas as matrices de dimensión m x n desígnaselle por M_{mxn}. Nas matrices deste conxunto definense as operacións de sumar e restar.

2.1 Suma de matrices

Dadas dúas matrices de M_{mxn} A= (a_{ij}) e B = (b_{ij}), chámase suma de ambas á matriz C = (c_{ij}) da mesma dimensión cuxo termo xenérico é $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. A suma de matrices desígnase por:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Exemplo

Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ de orde 2x3, calcular A + B

A + B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 1+0 & 2+1 \\ 5+3 & -4+5 & 7+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Podemos observar que para sumar matrices deberá ter a mesma dimensión, e obtemos outra matriz da mesma dimensión.

Propiedades da suma

- Asociativa. Calquera que sexan as matrices *A*, *B* e *C* de M_{mxn} cúmprese a igualdade $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Existencia da matriz nula en M_{mxn}. A matriz $0 = (0)$ é tal que $A + O = A$
- Existencia da matriz oposta. Dada a matriz *A* de M_{mxn} existe a matriz oposta $-A$ da mesma orde, de modo que $A + (-A) = O$
- Conmutativa. Para todo par de matrices *A* e *B* de M_{mxn} cúmprese a igualdade$A + B = B + A$

2.2 Diferenza de matrices

A diferenza de matrices A e B do conxunto M_{mxn} represéntase por A – B e obtense sumando ao minuendo o oposto do subtraendo; é dicir, $A - B = A + (-B)$. A diferenza de matrices $(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$ obtense ao restar elementos que ocupan o mesmo lugar nunha e noutra matriz.

Exemplo

Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ de orde 2x3, calcular A – B.

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-0 & 2-1 \\ 5-3 & -4-5 & 7-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

2.3 Produto dun número por unha matriz

Calquera que sexan o número real *k* e a matriz A = (a_{ij}) do conxunto M_{mxn}, chámase produto de *k* por *A*, á matriz B = (b_{ij}) da mesma dimensión que *A* e cuxo termo xenérico é $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

O produto dun número por unha matriz $k(a_{ij})$ obtense ao multiplicar por *k* cada elemento de A= (a_{ij}).

Exemplo

Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ de orde 2x3, calcular k·A

$$k \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-2) & 5\cdot 0 & 5\cdot 1 \\ 5\cdot 4 & 5\cdot(-3) & 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 20 & -15 & 25 \end{pmatrix}$$

Propiedades do produto dun número por unha matriz

Calquera que sexan as matrices *A* e *B* do conxunto M_{mxn} e os números reais λ e μ, verifícase:

- Distributiva respecto da suma de matrices: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- Distributiva respecto da suma de escalares: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- Asociativa respecto dos escalares: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- Elemento unidade: $1 \cdot A = A$

2.4 Produto de matrices

Para multiplicar matrices, as matrices factores deben reunir algúns requisitos que se describirán neste apartado.

a) Produto dunha matriz fila por unha matriz columna

Sexan *A* unha matriz cunha fila e *n* columnas e *B* unha matriz con *n* filas e unha columna:

A = $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

O produto da matriz fila *A* con *n* columnas pola matriz columna B con *n* filas é a matriz C = A·B cunha fila e unha columna; é dicir, un número c = $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$. Polo tanto:

$$A \cdot B = C = (c) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Hai que facer notar que, para poder multiplicar *A* e *B*, o número de columnas do primeiro factor *A* debe ser igual ao número de filas do segundo factor *B*.

Exemplo

Sexan A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ unha matriz cunha fila e 3 columnas e B = $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ unha matriz con 3 filas e unha columna. Achar a matriz produto.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)) = 6$$

O resultado é unha matriz de orde 1 x 1; polo tanto, un número.

Regra: Obsérvase que para realizar o produto déixase caer a matriz fila *A* na matriz columna *B*; multiplícanse os elementos enfrontados e súmanse os resultados.

b) Produto de dúas matrices calquera

Sexan *A* unha matriz do conxunto M_{mxn}, e *B* unha matriz do conxunto M_{nxp}; as columnas de *A* coinciden coas filas de *B* (neste caso *n*). O produto de matrices *A* do conxunto M_{mxn} e *B* do conxunto M_{nxp} é outra matriz *C* do conxunto M_{mxp} con *m* filas (as do primeiro factor *A*) e *p* columnas (as do segundo factor B), cuxos elementos calculanse así: o elemento cij da matriz produto C é o resultado de multiplicar a fila i da matriz A pola columna j da matriz B consideradas ambas como matrices fila e columna respectivamente. A expresión do elemento c_{ij} da matriz produto *C* será:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}) = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Exemplo

Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$:

a) Indicar a dimensión da matriz produto.

b) Calcular A·B.

a) A dimensión de *A* é 2 x 3. A dimensión de *B* é 3 x 2. Como o número de columnas de *A*, coincide co de filas de *B*, as matrices pódense multiplicar e ademais a dimensión da matriz produto é 2 x 2; número de filas do primeiro factor e columnas do segundo factor.

b) As notacións que se empregaron no desenvolvemento do produto de matrices pódense simplificar, mediante a seguinte regra: "Os elementos da matriz produto obtéñense ao deixar caer os elementos das filas da matriz primeiro factor sobre as columnas da matriz segundo factor; multiplicar os elementos que quedaron enfrontados e finalmente sumalos"

A·B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 4+0\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot(-2)+0\cdot 5 \\ 4\cdot 2+1\cdot 4+3\cdot 1 & 4\cdot 3+1\cdot(-2)+3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$

Propiedades do produto de matrices

O produto de matrices ten as propiedades seguintes:

- Asociativa. Calquera que sexan as matrices A, B, C nos casos que se poidan multiplicar as tres matrices. É dicir, se A é do conxunto M_{mxn} ou de dimensión m x n, B é do conxunto M_{nxp}, ou de dimensión n x p e C é do conxunto M_{pxq}, ou de dimensión p · q, entón:
$$(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$$
- Distributiva. Dadas as matrices A do conxunto M_{mxn}, ou de dimensión m n; B e C do conxunto M_{nxp}, ou de dimensión n x p cúmprese:
$$A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$$

O produto de matrices *Non* é en xeral conmutativo; é dicir, A•B ≠ B•A

Exemplo 1

Sexan as matrices A_{2x3} = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e B_{3x1} = $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ realiza A·B e B·A

$A_{2x3} \cdot B_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot(-1)+3\cdot 0 \\ 0\cdot 2+3\cdot(-1)+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Pero neste caso non se pode facer B·A

Exemplo 2

Sexan as matrices $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, realiza A·B e B·A

$$A_{2x3} \cdot B_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot 0+3\cdot 4+2\cdot 5 \\ 0\cdot 1+2\cdot 2+4\cdot(-1) & 0\cdot 0+2\cdot 4+4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}$$

$$B_{3x2} \cdot A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 3+0\cdot 2 & 1\cdot 2+0\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 0 & 2\cdot 3+4\cdot 2 & 2\cdot 2+4\cdot 4 \\ -1\cdot 1+5\cdot 0 & -1\cdot 3+5\cdot 2 & -1\cdot 2+5\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 14 & 20 \\ -1 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

3. Produto de matrices cadradas

O produto de matrices cadradas merece atención especial posto que as matrices cadradas do conxunto M_{nxn}, ou de orde n, multiplícanse entre si e o resultado é unha matriz do conxunto M_{nxn}, ou de orde n. En canto ás propiedades é evidente que seguen conservando as propiedades asociativa do produto e distributiva do produto respecto da suma, pero débense destacar outras propiedades. En canto á propiedade conmutativa sempre é posible o dobre produto A•B e B•A, pero en xeral o resultado será diferente, como se indica no seguinte exemplo.

Exemplo

Sexan $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula A·B e B·A. Comproba que o produto danos unha matriz do mesmo orde que as iniciais.

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ e $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; obsérvase que $A \cdot B \neq B \cdot A$

A matriz produto ten orde dúas.

O produto de matrices cadradas posúe elemento unidade e é a matriz identidade I_n; se *A* é unha matriz cadrada de orde *n*, tense: $I_n \cdot A = A \cdot I_n$. A matriz unidade de orde dúas será: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Potencias de matrices cadradas

Como se viu, o produto de dúas matrices cadradas é outra do mesma orde; isto fai que unha matriz póidase repetir como factor cantas veces precísese, dando lugar ás potencias de matrices, así:

$$A \cdot A = A^2; \; A \cdot A \cdot A = A^3; \; \ldots; \; A \cdot A \ldots_{n-veces} \ldots A = A^n$$

Exemplo

Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A^2, A^3 calcula e atopa unha expresión para A^n

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que o temo a_{12} de cada potencia é o produto de dous pola potencia que fagamos da matriz, isto é $n \cdot 2$.

Obtemos que a matriz $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Matriz trasposta e propiedades

Como xa mencionamos ao principio da unidade a matriz trasposta dunha matriz A é aquela que resulta ao escribir as filas de A como columnas. Represéntase por A^t. Vexamos unha serie de propiedades.

Propiedades

- A trasposta da trasposta é a matriz inicial $(A^t)^t = A$
- Trasposta da suma de matrices é igual a suma das traspostas: $(A + B)^t = A^t + B^t$
- A trasposta dun número por unha matriz é igual ao número pola trasposta da matriz $(kA)^t = kA^t$
- A trasposta dun produto é igual á trasposta do segundo factor pola trasposta do primeiro factor: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Se $A^t = A$ dise que a matriz é simétrica

Exemplo

Dada a matriz A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ a súa trasposta é A^t=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ e a trasposta desta matriz podemos observar que volve ser A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Esta matriz non é simétrica, non coincide coa súa trasposta.

5. Matriz inversa

Dada unha matriz cadrada A de orde n, non sempre existe outra matriz B chamada matriz inversa de A, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Cando existe a matriz B, dise que é a matriz inversa de A e represéntase A^{-1}; é dicir, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. As matrices cadradas que teñen inversa chamáselles matrices regulares o inversibles. As matrices cadradas que non teñen inversa chámanse matrices singulares

5.1 Cálculo da matriz inversa

Aplicando a definición: Para calcular a matriz inversa dunha matriz dada tendo en conta a definición teremos que resolver unha igualdade entre matrices $A \cdot X = I$ e obteremos un sistema.

Exemplo

Dada a matriz cadrada de orde dúas A = $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular a súa inversa.

Temos que calcular unha matriz B=$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ que cumpra $A \cdot B = B \cdot A = I_2$ se escribimos as matrices obtemos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectúase o produto: $\begin{pmatrix} 4x+7z & 4y+7u \\ x+2z & y+2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A igualdade dos dous termos dá lugar aos seguintes sistemas: $\begin{cases} 4x+7z=1 \\ x+2z=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 4y+7u=0 \\ y+2u=1 \end{cases}$

As solucións dos sistemas son: $x = 2,\ z = -1, y = -7, u = 4$

Polo tanto a matriz inversa será B= A^{-1} = $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Polo método de Gauss-Jordan: para o cálculo da matriz inversa de *A*, cando exista, pártese da matriz $(A \mid I_n)$ e mediante as transformacións que se indican a continuación chégase á matriz$(I_n \mid B)$; entón a matriz B = A^{-1} é a inversa de *A*.

As transformacións que se poden aplicar son as seguintes:

- Cambiar as filas de lugar: indícase poñendo as dúas filas a intercambiar e no medio unha frecha de dobre sentido.
- Multiplicar unha fila por un número distinto de cero: indicaremos o número e a continuación a fila.
- Sumar a unha fila outra multiplicada por un número: indicaremos en primeiro lugar a fila que queremos modificar e en segundo lugar a fila que lle sumamos.

Xeralmente colocase a matriz A e o seu lado a matriz identidade separadas por unha barra vertical:

$$(A|I_n) \longrightarrow (I_n|A^{-1})$$

<u>Exemplo</u>

Calcula a inversa da matriz M = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e comprobar o resultado.

Engádeselle á matriz *M* a matriz unidade, así:

$$(M\,|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1^aF \leftrightarrow 2^aF} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2^aF - 3\cdot 1^aF} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\cdot 2^aF}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{1^aF - 2\cdot 2^aF} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

A matriz inversa é $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.2 Aplicacións da matriz inversa: Ecuacións matriciais

As operacións con matrices e en particular o cálculo da matriz inversa permiten resolver situacións problemáticas nas que aparecen matrices.
Estas situacións chámanse **ecuacións matriciais**; resólvense cos mesmos principios que as ecuacións con coeficientes e variables de números reais, tendo en conta algunhas das seguintes consideracións:

- Algunhas matrices non teñen inversa.
- Produto de matrices non é conmutativo; polo que á hora de multiplicar os dous membros dunha igualdade débese ter en conta que a multiplicación se fai ben pola esquerda ou ben pola dereita en ambos os membros da igualdade.

No caso de ecuacións matriciais que se reducen á forma $A \cdot X = B \; ou \; X \cdot A = B$ e *A* ten inversa; a incógnita *X* calcúlase respectivamente multiplicando pola esquerda ou pola dereita por A^{-1} os dous membros da igualdade.

Na ecuación A·X = B, multiplícanse pola esquerda os dous membros por A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X) = A^{-1}\cdot B \Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$$

Na ecuación X·A = B, multiplícanse pola dereita os dous membros por A^{-1}:

$$(X\cdot A)\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1} \Rightarrow X\cdot(A\cdot A^{-1}) = B\cdot A^{-1} \Rightarrow X\cdot I = B\cdot A^{-1} \Rightarrow X = B\cdot A^{-1}$$

Exemplo

Resolver a ecuación matricial $A \cdot X + B = C$, A=$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e C=$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Se despexamos a matriz X:

$$A \cdot X + B = C \Rightarrow A \cdot X = C - B \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

Calcúlase a inversa de *A* polo método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2^aF-2\cdot 1^aF} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2^aF:(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{1^aF-4\cdot 2^aF}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$ Obtemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Substitúense as variables polos seus valores e opérase:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & -20 \\ \frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

Ás veces o problema consiste en determinar algúns elementos dunha ou varias matrices que figuran nunha ecuación matricial. Vexamos que se fai neste caso cun exemplo.

Exemplo

Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$, determinar os valores de *x*, *y* e *z* para que se verifique a igualdade:

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Multiplícanse as matrices e iguálanse as matrices dos dous membros:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y^2 & x+yz \\ x+yz & x^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+y^2 = 10 \\ x+yz = 0 \\ x+yz = 0 \\ x^2+z^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 9 \\ x+yz = 0 \\ x^2+z^2 = 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Da primeira ecuación obtense $y = \pm 3$

1. Se $y = 3$ o sistema $\begin{cases} x+3z = 0 \\ x^2+z^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ (-3z)^2 + z^2 = 10 \end{cases}$ ten como solucións $z = \pm 1$

a. Se $z = 1 \Longrightarrow x = -3 \Longrightarrow (x, y, z) = (-3,3,1)$
b. Se $z = -1 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow (x, y, z) = (3,3,-1)$

2. Se $y = -3$ o sistema $\begin{cases} x - 3z = 0 \\ x^2 + z^2 = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ (3z)^2 + z^2 = 10 \end{cases}$ ten como solucións $z = \pm 1$

a. Se $z = 1 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow (x, y, z) = (3, -3,1)$
b. Se $z = -1 \Longrightarrow x = -3 \Longrightarrow (x, y, z) = (-3, -3, -1)$

As matrices solución son:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

6. As matrices na resolucións de problemas

As matrices aparecen con frecuencia nas ciencias que traballan con datos ordenados, como é o caso das Ciencias Físicas, Económicas e Sociais. A continuación preséntanse algunhas situacións nas que as matrices son de utilidade. As matrices de información permiten resumir informacións diversas.

Exemplo

Unha fábrica produce dous modelos de lavadoras A e B en tres terminacións N,L e S. Produce do modelo A: 400 unidades na terminación N, 200 unidades na terminación L e 50 unidades na terminación S. Produce do modelo B: 300 unidades na terminación N, 100 unidades na terminación L e 30 unidades na terminación S. A terminación N leva 25 horas de taller e 1 hora de administración. A terminación L leva 30 horas de taller e 1,2 horas de administración. A terminación S leva 33 horas de taller e 1,3 horas de administración.

a) Representa a información en dúas matrices
b) Calcula unha matriz que exprese as horas de taller e de administración empregadas para cas un dos modelos.

Matriz de produción: filas modelo A e B; columnas terminacións N, L, S

$$P = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

Matriz de custo en horas: filas terminacións N, L, S; columnas custo en horas: T, A

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix}$$

Matriz que expresa as horas de taller e de administración para cada modelo:

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$$

Os grafos son de gran utilidade a hora de afrontar problemas cotiás permítenos organizar información de forma sinxela e esquemática. Esta información pódese pasar a unha matriz.

Cun grafo represéntase as relacións entre obxectos. Dous obxectos están relacionados cunha frecha ou ben con dobre frecha.

Ilustración 1: Grafo 1

Ilustración 2: Grafo 2

Grafo 1 o podemos asociar a unha matriz cadrada de dimensión $2x2$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que nos indica que soamente se une A con B.

Grafo 2 o podemos asociar a unha matriz cadrada de dimensión $2x2$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que nos indica que soamente se une A con B e B con A.

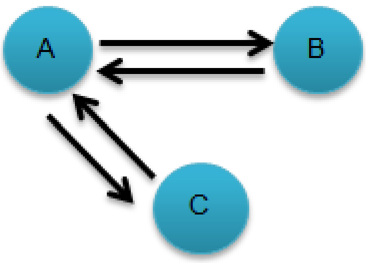

Ilustración 3: Grafo 3

Grafo 3 o podemos asociar a unha matriz cadrada de dimensión $3x3$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que nos indica que une A con B e C; B con A e C con A.

Licenzas das ilustracións

Ilustración	**Recurso**
Ilustración 1. Grafo 1	Autoría: Propia
Ilustración 2. Grafo 2	Autoría: Propia
Ilustración 3. Grafo 3	Autoría: Propia