PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Introdución á Programación Lineal

A programación lineal é unha parte das matemáticas que busca optimizar unha función, é dicir, facer máxima ou mínima unha función tendo en conta unha seria de restricións. Un exemplo de problema a optimizar sería:

"Unha determinada plantación necesita ser tratada cunha mestura de abono que conteña a lo menos 42 quilogramos de nitratos e 29 de fosfatos. No mercado existen dúas marcas cuxo contido e prezo atópanse na seguinte táboa:

Marca	Nitratos	Fosfatos	Prezo(kg)
M1	300g	400g	2€
M2	600g	200g	3€

Cántos quilos de cada abono hai que mercar para conseguir a mestura desexada a un custe mínimo?"

Neste exemplo o obxectivo é que o custo sexa mínimo: *"conseguir unha mestura a un custe mínimo"*

As restricións son de dous tipos:

- De oferta: dispoñemos de dúas marcas M1 e M2, coas características indicadas.
- De composición da mestura: debe conter, a lo menos 40kg de nitratos e 29kg de fosfatos.

Nesta unidade ímonos centrar en optimizar funciones lineais. A función a optimizar se lle chama "Función obxectivo" e as restricións formarán un sistema de inecuacións lineais.

1.1 Formulación dun problema de programación lineal: terminoloxía

Un problema de programación lineal, para dúas variables, representase da seguinte maneira alxébrica:

1. Maximizar a función $f(x,y) = ax + by + c$

   Restrinxida por $\begin{cases} a_1x + b_1y \le c_1 \\ a_2x + b_2y \le c_2 \\ \dots \end{cases}$
2. Minimizar a función $f(x,y) = ax + by + c$

   Restrinxida por $\begin{cases} a_1x + b_1y \le c_1 \\ a_2x + b_2y \le c_2 \\ \dots \end{cases}$

A función a optimizar como xa mencionamos se lle chama función obxectivo, tamén se pode denotar por: $z = ax + by + c$. Nesta expresión x e y son as variables que interveñen no problema, mentres que a, b, e c son constantes.
As restrición son inecuacións lineais. O seu número depende das restrición do problema e poden ser $>, <, \le, \ge$. Ao conxunto de valores de x e y que verifican todas e cada unha das restricións se lles chama conxunto de solucións ou rexión factible. Todo punto que se atope nesta rexión poderá

ser solución do problema. A solución óptima do problema será un par de valores (x_0, y_0) da re4xión factible que faga $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ se buscan o valor máximo ou $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ se buscas o valor mínimo.

Exemplo

Vexamos a formulación alxébrica do problema anterior:

Se mercamos x paquetes da marca M1 e y paquetes da marca M2, o obxectivo é minimizar o custo: $f(x, y) = 2x + 3y$

As restricións como xa vimos son de dous tipos:

1. Nitratos aportados: 0,3kg por cada x; 0,6kg por cada y, necesarios 42kg ⇒ $0{,}3x + 0{,}6y \geq 42$ ⇒ $30x + 60y \geq 420$
2. Fosfatos aportados: 0,4kg por cada x; 0,2kg por cada y, necesarios 29kg ⇒ $0{,}4x + 0{,}2y \geq 29$ ⇒ $4x + 2y \geq 290$
3. Son evidentes que as cantidades x e y deberán se positivas o que quere dicir: $x \geq 0; y \geq 0$
4. Todas as restrición forman o seguinte sistema de inecuacións:

$$\begin{cases} 30x + 60y \geq 420 \\ 4x + 2y \geq 290 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

1.2 Cálculo da rexión factible

A rexión factible está formada pola solucións do sistema de inecuacións que obtemos das restricións, recordemos como se resolven este tipo de sistemas traballados en cursos anteriores.

Un sistema de inecuacións lineais con dúas incógnitas é o conxunto formado por dúas ou máis inecuacións lineais con dúas incógnitas; por exemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \leq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \leq b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x + a_{n2}y \leq b_n \end{cases}$$

O signo ≤ que aparece en todas as inecuacións do exemplo, pode ser substituído en calquera delas polos outros signos de desigualdade.

Chámase solución xeral de sistema ou rexión factible, o conxunto de puntos que cumpran simultaneamente todas e cada unha das súas inecuacións.

Para localizar a rexión factible ou solución xeral do sistema, realízanse os pasos seguintes:

- Localízanse os semiplanos solución de cada unha das inecuacións do sistema.
- Realízase a intersección de todos os semiplanos e o recinto que resulta é a solución xeral ou rexión factible.

Cos sistemas de inecuacións lineais, en canto á solución, pode acontecer como no caso dos sistemas que non teñan solución, sistema incompatible; é dicir, que a rexión factible sexa o conxunto baleiro; no caso de que exista, a rexión factible pode ser acoutada (área finita) ou non acoutada (área infinita).

Exemplo 1

Resolve o seguinte sistema $\left.\begin{matrix} x+y\leq 6 \\ 3x-2y\geq -6 \end{matrix}\right\}$

- Resolvemos cada inecuación por separado e localizar os semiplanos solución de cada unha das inecuacións do sistema.
- Solución do sistema é a intersección de todos os semiplanos. O recinto que resulta é a solución xeral ou rexión factible.

a) Inecuación $x+y\leq 6$. Representamos a recta $y=6-x$. Facemos táboas de valores e eliximos o semiplano, escollendo un punto de fora da recta, por exemplo (0,0) e estudamos o signo da inecuación $0\leq 6$ certo, logo a solución é o semiplano no que esta o punto (0,0). Por ter un igual a recta é valida, denótase cun trazo continuo.

x	0	1	2
y	6	5	4

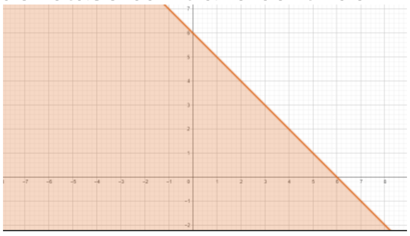

Ilustración 1: Solución inecuación 1

b) Inecuación $3x-2y\geq -6$. Representamos a recta $y=\frac{3x+6}{2}$. Facemos táboas de valores e eliximos o semiplano, escollendo un punto de fora da recta, por exemplo (0,0) e estudamos o signo da inecuación $0\geq -6$ certo, logo a solución é o semiplano no que esta o punto (0,0). Recta válida.

x	0	1	2
y	3	9/2	6

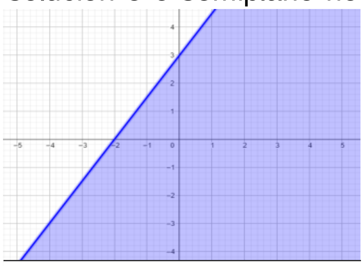

Ilustración 2: Solución inecuación 2

c) Rexión factible, é a intersección dos semiplanos solucións de ambas inecuacións. Rexión non acoutada.

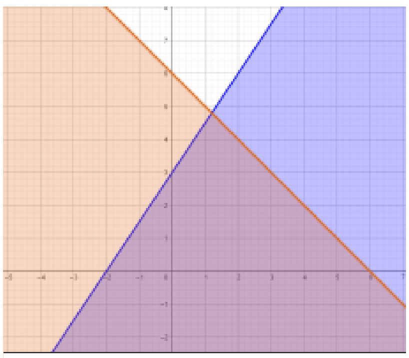

Ilustración 3: Rexión factible

<u>Exemplo 2</u>

Representa a solución do seguinte sistema de inecuacións, e di se a rexión factible é acoutada ou non. $\begin{cases} y \leq 3x+3 \\ x+y \leq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$

- Resolvemos cada inecuación por separado e hai que localizar os semiplanos solución de cada unha das inecuacións.

  a) $y \leq 3x+3$ representa un semiplano con fronteira, recta válida e pasa polos puntos (0,3) e (-1,0). O punto (0,0) pertence ao semiplano, xa que $0 \leq 3 \cdot 0 + 3$. Semiplano *
  b) $x+y \leq 3$ representa un semiplano con fronteira, recta válida e pasa polos puntos (0,3) e (3,0). O punto (0,0) pertence ao semiplano, xa que $0+0 \leq 3$. Semiplano *
  c) $y \geq 1$ representa un semiplano con fronteira é horizontal e a orixe non pertence ao semiplano 0≥ 1!!. Semiplano *
- Representamos todos os semiplanos e marcamos a rexión común a todos

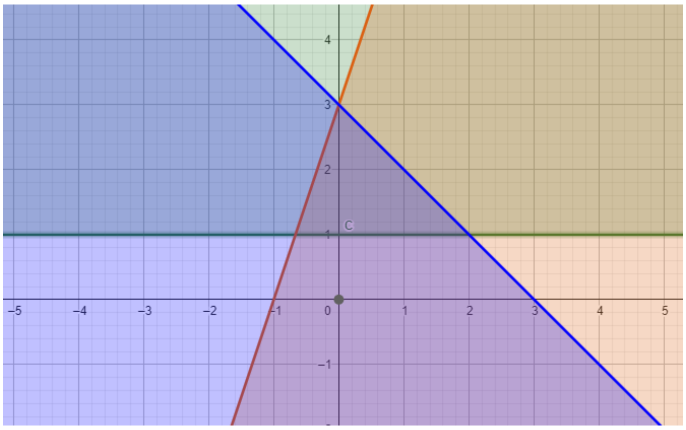

Ilustración 4: Intersección de semiplanos

A solución, rexión factible, está acoutada. A zona é un triángulo e todos os puntos do seu interior. Se representamos soamente a rexión común obtemos:

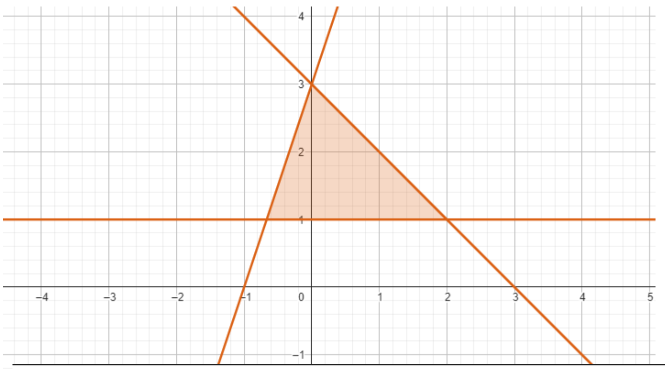

Ilustración 5: Rexión factible 2

2. Como encontramos a solución dun problema de programación lineal

Unha vez que temos a formulación alxébrica do problema, é dicir, a función obxectivo e o conxunto de restrición determinado por un sistema de inecuacións. Para atopar a solución óptima do problema débense ter en conta que:

- O recinto que determina a solución do sistema de inecuacións formado polas restricións que se denomina como xa mencionamos, rexión factible. Os puntos desta rexión denomínanse solucións factibles e entre estas atoparase de existir, a solución ou solucións do problema que se denominará solución óptima.
- Un problema de programación lineal pode ter ningunha, unha ou infinitas solucións óptimas.
- Se existe solución atoparase sempre nun dos vértices da rexión factible. Se o problema ten infinitas solucións óptimas, estas son sempre os puntos correspondentes a un lado da rexión factible.
- Se a rexión é acoutada o problema terá polo menos unha solución, se non o é poder non ter solución.

2.1 Método gráfico para obter as solucións

Para atopar o valor óptimo, polo método gráfico, dunha función obxectivo, sometida a unhas restricións, realizáranse os seguintes pasos:

1. Debúxase o recinto limitado polas restricións dadas mediante o sistema.
2. Iguálase a cero a función obxectivo $ax + by = 0$ e representamos a recta que pasa pola orixe (0,0)
3. Trasladase a recta anterior paralelamente a súa dirección, de modo que as rectas resultantes varran a rexión factible.
4. Tómase nota dos puntos no que as mencionadas rectas conectan ou abandona a rexión factible; o valor ou valores da función obxectivo nos mencionados puntos proporciónannos o valor ou valores óptimos, máximo ou mínimos, buscados.

<u>Exemplo</u>

Optimiza a función $F(x,y) = 2x + 8y$ coas seguintes restricións $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ -x + 2y \leq 4 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$ polo método gráfico.

a) Teremos que debuxar a rexión factible para o cal estudaremos cales son os semiplanos solucións das diferentes inecuacións. Recordar debemos debuxar cada recta e elixir o semiplano solución.Obtemos a seguinte rexión:

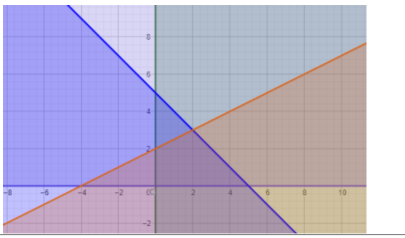

Ilustración 6: Intersección de semiplanos 2

Sinalamos os vértices da intersección e para poder visualizar mellor a rexión factible eliminamos o resto das cores. Os vértices son os puntos de intersección das diferentes rectas, neste caso son valores enteiros e identifícanse facilmente.

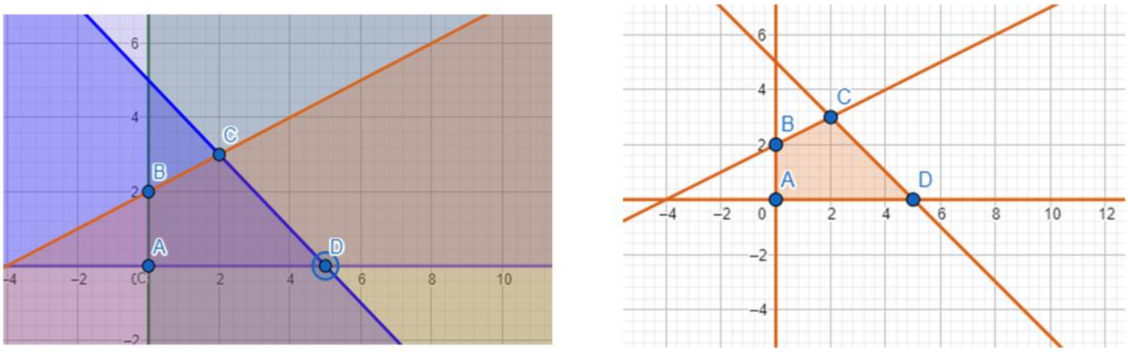

Ilustración 7: Rexión factible e vértices

b) Representamos a recta que obtemos ao igualar a función obxectivo a cero $F(x,y) = 0$; $2x + 8y = 0$, pasa por (0,0) e facemos unha táboa de valores:

x	0	4	8
y	0	-1	-2

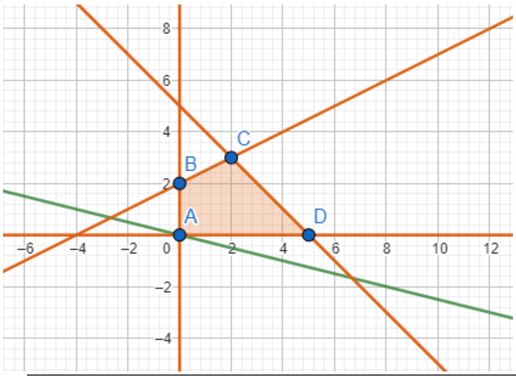

Ilustración 8: Rexión factible e función obxectivo

c) Trazamos diferentes rectas paralelas a anterior.

A recta entra na rexión polo punto A(0,0) onde a función obxectivo vale 0, e sae polo punto C(2,3), o punto intersección de dúas rectas, obtense resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$.

Polo tanto, no punto A(0,0) temos un mínimo de valor $F(0,0) = 0$ e no punto C(2,3) teremos un máximo de valor $F(2,3) = 2 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 28$

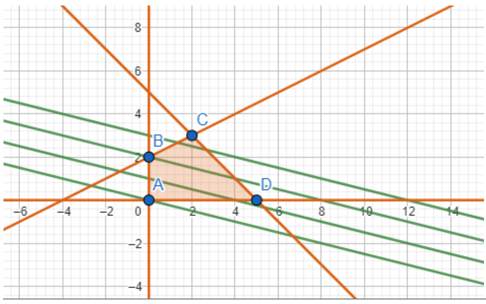

Ilustración 9: Rexión factible e paralelas a función obxectivo

2.2 Método analítico para obter as solucións

Este método baséase no Teorema fundamental da Programación Lineal para dúas variables, cuxo enunciado é o seguinte:

Unha función obxectivo de dúas variables que posúa máximo e mínimo únicos nunha rexión factible acoutada, toma os devanditos valores necesariamente nos vértices da rexión. Se a función obxectivo toma o mesmo valor óptimo (máximo ou mínimo) en dous vértices, entón a función ten infinitas solucións situadas no segmento que determinan os dous vértices mencionados. Se a rexión factible non está acoutada, a función obxectivo toma o valor óptimo (máximo ou mínimo) se existen, nos vértices da rexión; pero pode acontecer que non alcance algún dos devanditos valores óptimos.

Do teorema anterior dedúcese que para determinar os valores óptimos hai que:

- Debuxar o recinto limitado polas restricións do problema.
- Calcular as coordenadas dos vértices.
- Substituír as coordenadas dos vértice na función obxectivo e ver os valores onde se fai máxima e mínima.

Exemplo 1

Optimiza a función $F(x,y)=2x+8y$ coas seguintes restricións $\begin{cases} x+y\leq 5 \\ -x+2y\leq 4 \\ x\geq 0 \quad y\geq 0 \end{cases}$ polo método analítico.

Partimos da rexión factible e vértices calculados no exemplo anterior, ilustración 7, rexión acoutada. E substituímos os vértices na función obxectivo: $F(0,0)=0$; $F(0,2)=20$; $F(2,3)=28\ e\ F(5,0)=10$.
Polo tanto polo teorema anterior deducimos que ten un mínimo no (0,0) e un máximo no (2,3).

Exemplo 2

Maximiza e minimiza si é posible a función $F(x,y)=x+3y$, sometida a $\begin{cases} x+y\geq 4 \\ 3x+y\geq 6 \\ x-y\leq 2 \\ x\geq 0\ y\geq 0 \end{cases}$

Debuxamos a rexión factible e calculamos os vértices A(3,1) e B(1,3). Substitúense o valor dos vértices na función obxectivo: $F(3,1)=6$, $F(1,3)=18$, como a rexión non está acoutada terá un mínimo no A(3,1) que vale 6. Carece de máximo a medida que as rectas sa afastan da orixe o valor da función obxectivo aumenta, a rexión non está acoutada.

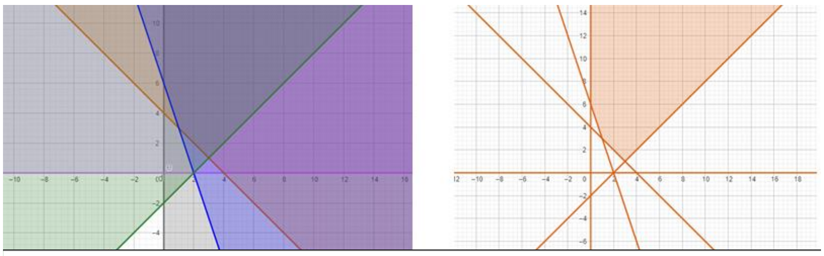

Ilustración 10: Rexión factible 3

3. Resolución de problemas de programación lineal

Neste apartado trataremos mediante diferentes exemplos, situacións problemáticas, nas que é preciso aplicar a teoría da programación lineal. O primeiro paso será traducir o enunciado ao linguaxe alxébrico como xa vimos anteriormente.

Exemplo 1

Un gandeiro desexa proporcionar ao seu gando unha dieta que conteña un mínimo de 15 unidades de substancia *A* e outras 15 de substancia B. No mercado só se dispón de dúas clases de compostos: o tipo *X* cunha unidade de A e cinco de B, e o tipo Y, con cinco unidades de A e unha de B. O prezo do tipo *X* é de 10 euros e o do tipo *Y* é de 30 euros. Pregúntase:

a) Atopa se existe a rexión factible de solucións.

b) Calcula as cantidades que han de comprar de cada tipo para cubrir as necesidades cun custo mínimo.

c) Acha o valor do devandito custo mínimo.

Sexa x a cantidade do composto X e y cantidade do composto Y que se precisa para cumprir a dieta. A dieta está sometida ás seguinte restricións: $\begin{cases} x+5y \geq 15 \; * \\ 5x+y \geq 15 \; * \\ x \geq 0 \; y \geq 0 \; * \end{cases}$ a función obxectivo a minimizar será $F(x,y)=10x+30y$

Debuxamos a rexión factible e calculamos os vértices, que é onde se atopará o mínimo.

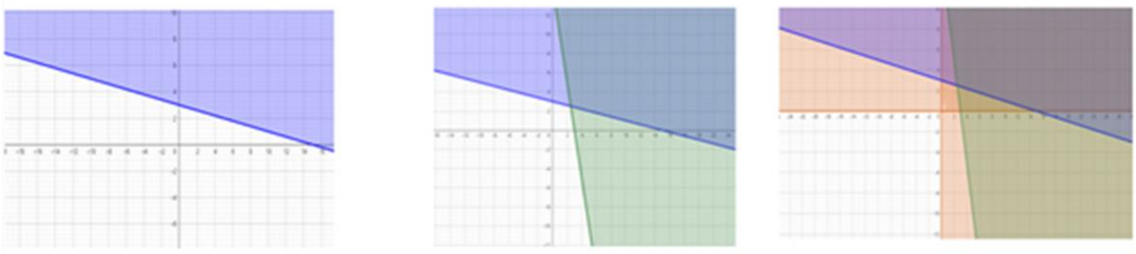

Ilustración 11: Rexión factible 4

a) A rexión factible non é acoutada. Os vértices A e B inmediatos, C teremos que resolver o sistema $\begin{cases} x+5y=15 \\ 5x+y=15 \end{cases} \Rightarrow x=2{,}5 \; e \; y=2{,}5$

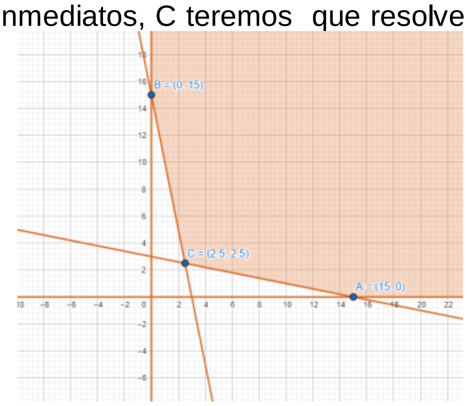

Ilustración 12: Rexión factible non acoutada

b) Calculamos o valor da función obxectivo nos vértices:
$F(0{,}15)=450$ € $F(15{,}0)=150$ € $F(2.5, 2.5)=100$ €
Polo tanto o mínimo atópase no punto C(2.5, 2.5)
A mesma cantidade das sustancias X e Y.

c) O custo mínimo da dieta será de100 €

4. Recursos informáticos

Geogebra é unha aplicación libre que nos permite calcular rexións factibles de dúas ou tres variables de forma moi rápida e sinxela. Vexamos os pasos que temos que seguir para facelo:

Se queremos representar a rexión factible determinada polas seguintes restricións: $\begin{cases} x+y \leq 5 \\ -x+2y \leq 4 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$

1. Abrimos os Geogebra no modo de Cal. Gráfica e introducimos a primeira restrición:

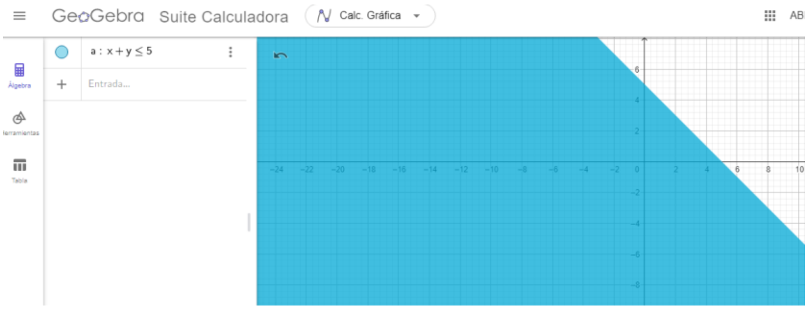

Ilustración 13: Uso do GeoGebra

2. Da mesma forma introducimos o resto das restricións, podemos elixir a cor de cada un dos semiplanos, como podemos ver na imaxe:

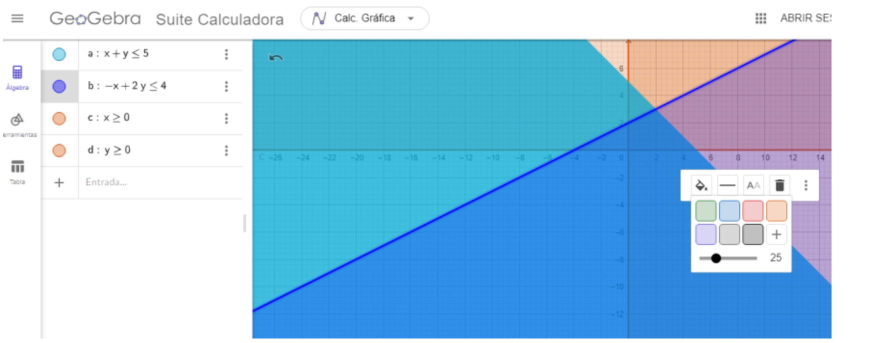

Ilustración 14: Cores co GeoGebra

3. A rexión factible é onde se atopan todas as cores. Se queremos que soamente apareza dita rexión podemos escribir todas as restrición nunha mesma liña enlazando cada unha delas co signo intersección que se indica introducindo dúas veces o signo &:
   $(\,x+y \leq 5\&\&-x+2y \leq 4\&\&x \geq 0\&\&y \geq 0)$
   Cando lle demos a enter soamente se visualizará a rexión factible:

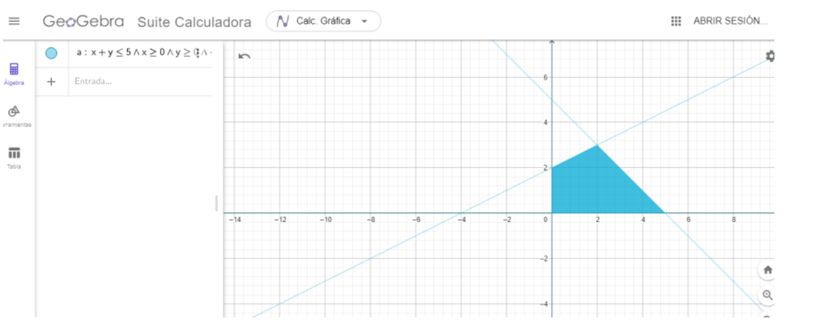

Ilustración 15: Rexión factible co GeoGebra

4. Se queremos que aparezan os vértices da rexión factible, debemos despregar o comando ferramentas e seleccionar a opción punto, na imaxe poñernos co cursor enriba de cada punto e aparecen as coordenadas e o nome.

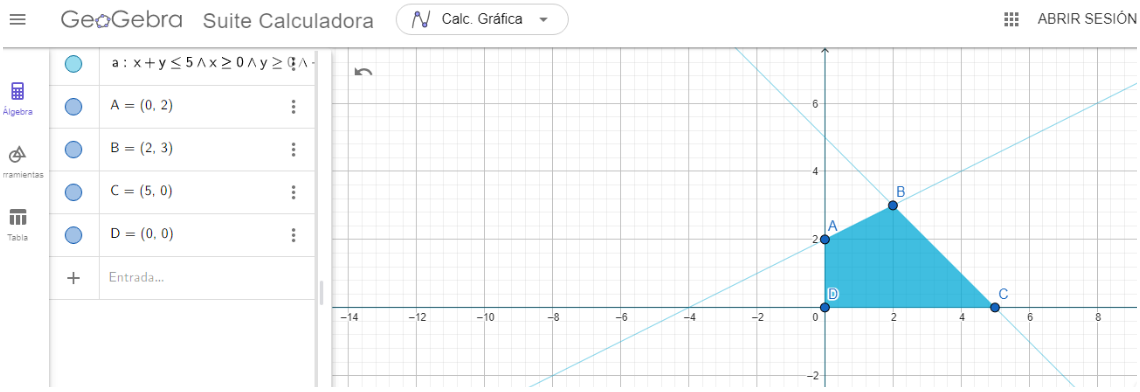

Ilustración 16: Vértices da Rexión factible

Licenzas das ilustracións

Ilustración	Recurso
Ilustración 1. Solución inecuación 1.	Autoría: Propia
Ilustración 2. Solución inecuación 2.	Autoría: Propia
Ilustración 3. Rexión factible	Autoría: Propia
Ilustración 4. Intersección de semiplanos	Autoría: Propia
Ilustración 5. Rexión factible 2	Autoría: Propia
Ilustración 6. Intersección de semiplanos 2	Autoría: Propia
Ilustración 7. Rexión factible e vértices	Autoría: Propia
Ilustración 8. Rexión factible e función obxectivo	Autoría: Propia
Ilustración 9. Rexión factible e paralelas a función obxectivo	Autoría: Propia
Ilustración 10. Rexión factible 3	Autoría: Propia
Ilustración 11. Rexión factible 4	Autoría: Propia
Ilustración 12. Rexión factible acoutada	Autoría: Propia
Ilustración 13. Uso do GeoGebra	Autoría: Propia
Ilustración 14. Cores co Geogebra	Autoría: Propia
Ilustración 15. Rexión factible co GeoGebra	Autoría: Propia
Ilustración 16: Vértices da rexión factible	Autoría: Propia