MATRICES

Exercicios autoavaliables

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{5} & \sqrt{3} \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

   a) Cal é a súa dimensión?
   b) Indica o valor de a_{12}, a_{21} e a_{23}.

2. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ y & 0 & z \end{pmatrix}$, indica os valores de *x*, *y* e *z* na matriz *B* para que sexa igual a *A*.

3. Escribe as seguintes matrices:
   a) A matriz unidade de orde catro.
   b) A matriz nula de dimensión 3 x 2.
   c) Unha matriz triangular de orde dúas.
   d) Unha matriz diagonal de orde dúas.

4. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula a súa oposta.

5. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

   a) $A + B$, b) $A - B$, c) $2A - 3B + 4C$, d) $A \cdot B$, e) $B \cdot A$, f) $A(B + C)$

6. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e C = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula:

   a) $A + 2B$, b) $3A - B$, c) $(A + B)C$, d) $A \cdot C$, e) $B \cdot C$, f) $A \cdot C + B \cdot C$

7. Calcula A^2, A^{20} e A^{30}, sendo A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Acha todas as matrices X = $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, con a, b, c $\in \mathbb{R}$ que satisfagan a ecuación matricial $X^2 = 2X$

9. Encontra números *a* e *b* de forma que a matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = 2A$. Para estes valores de a e b e tomando B = $\frac{1}{2}$A, calcula B^{50} e A^{50}

10. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula as matrices A^2, A^3, A^4, A^5 e obtén razoadamente a matriz A^n para n > 5.

11. Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e C = $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, calcula:

a) A^t, b) B^t, c) $(A+B)^t$, d) $(A+B+C)^t$

12. Calcula as matrices inversas das matrices:

a) A = $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, b) B = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, c) C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

13. Calcula as matrices inversas das matrices:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ encontra *X* tal que $A \cdot X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

15. Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ atopa unha matriz da forma X = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ que verifique que $A \cdot X = X \cdot B$

16. Acha a matriz *X* tal que $A \cdot X = B \cdot A$, sendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

17. Resolve a ecuación en X, $AX + 3B + 2C = D$, sendo A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e D = $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

18. Nunha acería fabrícanse tres tipos de produtos: aceiro en láminas, en rolos ou aceiros especiais. Estes produtos requiren chatarra, carbón e aliaxes nas cantidades que se indican na táboa seguinte, por cada unidade de produto fabricado:

	Aceiro en láminas	Aceiro en rolos	Aceiros especiais
Chatarra	8	6	6
Carbón	5	6	4
Aliaxes	2	1	3

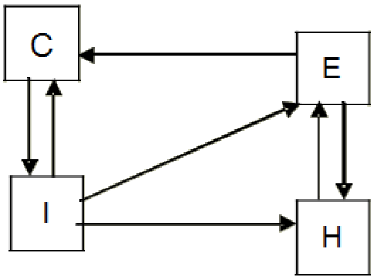
a) Se durante o próximo mes deséxanse fabricar 6 unidades de aceiro en láminas, 4 unidades de aceiro en rolos e 3 unidades de aceiros especiais, obtén unha matriz que indique as cantidades de chatarra, carbón e aliaxes que serán necesarias.

b) Se se dispón de 40 unidades de chatarra, 28 de carbón e 14 de aliaxes, cantas unidades de cada tipo de aceiro poderanse fabricar con estes materiais?

19. No grafo seguinte aparecen indicadas as comunicacións de catros puntos importantes dunha localidade; Concello = C, Estación de tren = E, Instituto de Secundaría = I e Hospital = H.

a) Forma a matriz de información do grafo.

b) Calcula o cadrado da matriz anterior e explica o seu significado.



Solucións

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{5} & \sqrt{3} \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

   a) Cal é a súa dimensión?
   b) Indica o valor de a_{12}, a_{21} e a_{23}

a) Cal é a súa dimensión? Como a matriz ten dúas filas e tres columnas a súa dimensión é 2 x 3
b) O valor de $a_{12} = \frac{-2}{5}$, $a_{21} = 4$ e $a_{23} = -3$

2. Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ y & 0 & z \end{pmatrix}$, indica os valores de *x*, *y* e *z* na matriz *B* para que sexa igual a *A*.

Para que ambas matrices sexan iguais todos os elementos teñen que coincidir, así que igualamos e obtemos $x = -3$, $y = -7$, $z = 4$.

3. Escribe as seguintes matrices:
   a) A matriz unidade de orde catro.
   b) A matriz nula de dimensión 3 x 2.
   c) Unha matriz triangular de orde dúas.
   d) Unha matriz diagonal de orde dúas.

a) $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *b)* $O_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, *d)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

4. Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula a súa oposta.

A oposta dunha matriz obtense cambiando o signo a todos os seus elementos:
$-A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

5. Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e C = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A + B$, b) $A - B$, c) $2A - 3B + 4C$, d) $A \cdot B$, e) $B \cdot A$, f) $A(B + C)$

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 \\ 2+0 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-1 \\ 2-0 & -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $2A - 3B + 4C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\cdot 3 & 4\cdot 1 \\ 4\cdot(-2) & 4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 23 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) \\ 2\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

e) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-3)\cdot 2 & 0\cdot 0 + (-3)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

f) $A(B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

6. Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e C = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A + 2B$, b) $3A - B$, c) $(A + B)C$, d) $A \cdot C$, e) $B \cdot C$, f) $A \cdot C + B \cdot C$

a) $A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

b) $3A - B = 3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

c) $(A + B)C = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2\cdot 2 + 1\cdot 0 + 5\cdot 1 & -2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 5\cdot 3 & -2\cdot 4 + 1\cdot(-1) + 5\cdot 0 \\ 2\cdot 2 + 8\cdot 0 + 3\cdot 1 & 2\cdot 1 + 8\cdot 2 + 3\cdot 3 & 2\cdot 4 + 8\cdot(-1) + 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 & -9 \\ 7 & 27 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1\cdot 2+1\cdot 0+3\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot 2+3\cdot 3 & -1\cdot 4+1\cdot(-1)+3\cdot 0 \\ 2\cdot 2+4\cdot 0+0\cdot 1 & 2\cdot 1+4\cdot 2+0\cdot 3 & 2\cdot 4+4\cdot(-1)+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -5 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

e) $B \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot 1 & -1\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 3 & -1\cdot 4+0\cdot(-1)+2\cdot 0 \\ 0\cdot 2+4\cdot 0+3\cdot 1 & 0\cdot 1+4\cdot 2+3\cdot 3 & 0\cdot 4+4\cdot(-1)+3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 3 & 17 & -4 \end{pmatrix}$

f) $A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -5 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 3 & 17 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 & -9 \\ 7 & 27 & 0 \end{pmatrix}$

7. Calcula A^2, A^{20} e A^{30}, sendo A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^5 = A \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

A partir de A^4 volve repetirse o ciclo.

Como 20 = 4·5, $A^{20} = (A^4)^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por outra parte, como 30 = 4·7 + 2, $A^{30} = (A^4)^7 \cdot A^2 = I^7 \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

8. Acha todas as matrices X = $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, con a, b, c $\in \mathbb{R}$ que satisfagan a ecuación matricial $X^2 = 2X$

$X^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{pmatrix}$

$2X = 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$

Establécese a igualdade de matrices: $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$

Da igualdade de matrices obtense o sistema:

$$\begin{cases} a^2 = 2a \\ ab + bc = 2b \\ c^2 = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ e } a = 2 \\ ab + bc = 2b \\ c = 0 \text{ e } c = 2 \end{cases}$$

Resolvemos a 1ª e 3ª ecuación que teñen unha soa incógnita e despois utilizamos os resultados para resolver a 2ª.
Para a = 0 e c = 0 ⟹ 0 = 2b ⟹ b = 0
Para a = 0 e c = 2 ⟹ 2b = 2b ⟹ b pode tomar calquera valor
Para a = 2 e c = 0 ⟹ 2b = 2b ⟹ b pode tomar calquera valor
Para a = 2 e c = 2 ⟹ 2b + 2b = 2b ⟹ 2b = 0 ⟹ b = 0
Polo tanto, as posibles matrices X son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } b \epsilon \mathbb{R}$$

9. Encontra números *a* e *b* de forma que a matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = 2A$. Para estes valores de a e b e tomando B = $\frac{1}{2}$A, calcula B^{50} e A^{50}.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 1+b \\ a+ab & a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$$

Establécese a igualdade: $\begin{pmatrix} 1+a & 1+b \\ a+ab & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$

Da igualdade de matrices obtense o sistema:

$$\begin{cases} a+1 = 2 \\ b+1 = 2 \\ a(b+1) = 2a \\ a+b^2 = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ 1(1+1) = 2 \\ 1+1^2 = 2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1;\ b = 1$$

Para a = 1 e b = 1; obtemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^2 = B \cdot B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvase que $B^2 = B$; *polo tanto,* $B^3 = B^2 \cdot B = B \cdot B = B^2 = B$
Polo tanto $B^{50} = B$

$$B^{50} = B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora temos que calcular A^{50}*:*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$A^4 = A^3 \cdot A \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{pmatrix}$

Obsérvase que o expoñente da base 2 é inferior nunha unidade ao expoñente de A.

Polo tanto: $A^{50} = \begin{pmatrix} 2^{49} & 2^{49} \\ 2^{49} & 2^{49} \end{pmatrix}$

10. Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula as matrices A^2, A^3, A^4, A^5 e obtén razoadamente a matriz A^n para n > 5.

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot 0 = 0$ *e* $A^5 = A^4 \cdot A = 0 \cdot A = 0$

Se n > 5, $A^n = (0)$ *porque* $A^n = A^{n+5-5} = A^5 \cdot A^{n-5} = (0) \cdot A^{n-5} = (0)$

11. Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e C = $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, calcula:

a) A^t, b) B^t, c) $(A+B)^t$, d) $(A+B+C)^t$

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

d) $A + B + C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B+C)^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

12. Calcula as matrices inversas das matrices:

a) A = $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, b) B = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, c) C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Recordemos que para calcular a matriz inversa polo método de Gauss, aplicaremos transformacións ata que a convertamos na identidade. Esas mesmas transformacións, aplicaránse a identidade e a matriz obtida será a inversa.

a) Pártese da matriz (A I I)

$$(A\ I\ I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1^aF \leftrightarrow 2^aF} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2^aF - 2\cdot 1^aF} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{1^aF:2 + 2^aF}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

A matriz inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) Pártese da matriz (B I I)

$$(B\ \ I\ \ I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1^aF - 2^aF} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2^aF - 3\cdot 1^aF} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[2^aF:(-2)]{1^aF + 2^aF:2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \end{array}\right)$$

A matriz inversa é $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

c) Pártese da matriz (C I I)

$$(C\ I\ I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2^aF - 2\cdot 1^aF} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2^aF\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

A matriz inversa é ela mesma, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = C$

13. Calcula as matrices inversas das matrices:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Pártese da matriz (A I I)

$$(A\ I\ I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\0&3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{2^aF-2\cdot 1^aF}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&-1&-3&-2&1&0\\0&3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{3^aF+3\cdot 2^aF}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&-1&-3&-2&1&0\\0&0&-8&-6&3&1\end{array}\right)\xrightarrow{3^aF:(-8)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&-1&-3&-2&1&0\\0&0&1&\frac{3}{4}&\frac{-3}{8}&\frac{-1}{8}\end{array}\right)\xrightarrow[-2^aF-3\cdot 3^aF]{1^aF+2^aF+3^aF}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{-1}{4}&\frac{5}{8}&\frac{-1}{8}\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&1&\frac{3}{4}&\frac{-3}{8}&\frac{-1}{8}\end{array}\right)$$

A matriz inversa é $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{4}&\frac{5}{8}&\frac{-1}{8}\\\frac{-1}{4}&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}&\frac{-3}{8}&\frac{-1}{8}\end{pmatrix}$

b) Pártese da matriz (B I I)

$$(B\ I\ I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)=\xrightarrow[3^aF-1^aF+2^aF]{2^aF-1^aF}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[-2^aF+3^aF]{1^aF+2^aF-3^aF}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)$$

A matriz inversa é $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

14. Dada a matriz A = $\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$ encontra *X* tal que $A\cdot X\cdot A=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix}$

Calcúlase a inversa de A polo método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&-3&1&0\\-1&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{1^aF+2^aF}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&1\\-1&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{2^aF+1^aF}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&1\\0&1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{1^aF+2^aF}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&3\\0&1&1&2\end{array}\right)$$

Logo $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$

Multiplícase á dereita e á esquerda por A^{-1}:

$A^{-1}\cdot(A\cdot X\cdot A)\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}\cdot A^{-1} \Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot X\cdot(A\cdot A^{-1}) = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}\cdot A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}\cdot A^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 14\\3 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26 & 46\\15 & 27\end{pmatrix}$

15. Dadas as matrices A = $\begin{pmatrix}-4 & -1\\4 & 1\end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & -4\end{pmatrix}$ atopa unha matriz da forma X = $\begin{pmatrix}1 & 1\\x & y\end{pmatrix}$ que verifique que $A\cdot X = X\cdot B$.

$A\cdot X = \begin{pmatrix}-4 & -1\\4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4-x & -4-y\\4+x & 4+y\end{pmatrix}$

$X\cdot B = \begin{pmatrix}1 & 1\\x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\x-2y & 2x-4y\end{pmatrix}$

$A\cdot X = X\cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix}-4-x & -4-y\\4+x & 4+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\x-2y & 2x-4y\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}-4-x=-1\\-4-y=-2\\4+x=x-2y\\4+y=2x-4y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-3\\y=-2\\2y=-4\\2x-5y=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$$

A matriz X será: $X = \begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}$

16. Acha a matriz *X* tal que $A\cdot X = B\cdot A$, sendo A = $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Se despexamos X da ecuación matricial obtemos:

$A\cdot X = B\cdot A \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B\cdot A \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B\cdot A$ *polo tanto precisamos a inversa de A*

Calcúlase a inversa de A polo método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{3^aF+1^aF} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{3^aF:3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2^aF-3^aF]{1^aF-2\cdot 3^aF} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3}\\0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3}\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{array}\right)$$

Logo $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot B \cdot A \Longrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 4 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

17. Resolve a ecuación en X, $AX + 3B + 2C = D$, sendo A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e D = $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Se despexamos X, obtemos:
$AX + 3B + 2C = D \Longrightarrow AX = D - 3B - 2C \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (D - 3B - 2C) \Longrightarrow$
Calcúlase a inversa de A polo método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2^aF+2\cdot 1^aF]{1^aF\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2^aF:5]{1^aF+2^aF:5} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Logo $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (D - 3B - 2C) \Longrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

18. Nunha acería fabrícanse tres tipos de produtos: aceiro en láminas, en rolos ou aceiros especiais. Estes produtos requiren chatarra, carbón e aliaxes nas cantidades que se indican na táboa seguinte, por cada unidade de produto fabricado:

	Aceiro en láminas	Aceiro en rolos	Aceiros especiais
Chatarra	8	6	6
Carbón	5	6	4
Aliaxes	2	1	3

a) Se durante o próximo mes deséxanse fabricar 6 unidades de aceiro en láminas, 4 unidades de aceiro en rolos e 3 unidades de aceiros especiais, obtén unha matriz que indique as cantidades de chatarra, carbón e aliaxes que serán necesarias.
b) Se se dispón de 40 unidades de chatarra, 28 de carbón e 14 de aliaxes, cantas unidades de cada tipo de aceiro poderanse fabricar con estes materiais?

A táboa do enunciado dá lugar á matriz A = $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Os datos do enunciado dan a matriz de produción P = $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

O produto A·P é a matriz de materiais que se precisan para a produción desexada.

A·P == $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 66 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{matrix} Chatarra \\ Carbón \\ aliaxes \end{matrix}$

b) Sexa P' = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$ *a matriz de produción que se pode realizar a partir da matriz de existencias*

E = $\begin{pmatrix} 40 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix}$

Logo, A·P' = E $\Longrightarrow$ *A*$^{-1}$*·A·P' = A*$^{-1}$*·E* $\Longrightarrow$ *P' = A*$^{-1}$*·E*

Calcúlase a inversa de A polo método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1^aF:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3^aF\cdot 2-1^aF} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \frac{-1}{2} & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[9\cdot 3^aF+2^aF]{4\cdot 2^aF-5\cdot 1^aF} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & \frac{-5}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & -7 & 4 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[3^aF:28]{3\cdot 1^aF-2^aF} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 8 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & \frac{-5}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{7} & \frac{9}{14} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2^aF-3^aF]{1^aF-8\cdot 3^aF} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & 6 & -\frac{36}{7} & -\frac{36}{7} \\ 0 & 9 & 0 & \frac{-9}{4} & \frac{27}{7} & \frac{-9}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{7} & \frac{9}{14} \end{array}\right) \xrightarrow[2^aF:9]{1^aF:12} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{7} & \frac{9}{14} \end{array}\right)$$

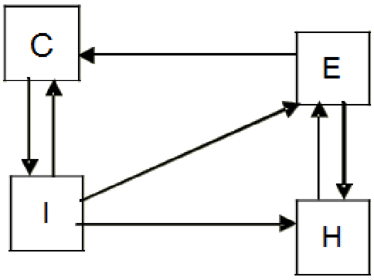
Logo A^{-1} $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{14} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$

A solución será: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{14} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} chatarra \\ carbón \\ aliaxes \end{matrix}$

19. No grafo seguinte aparecen indicadas as comunicacións de catros puntos importantes dunha localidade; Concello = C, Estación de tren = E, Instituto de Secundaría = I e Hospital = H.

a) Forma a matriz de información do grafo.

b) Calcula o cadrado da matriz anterior e explica o seu significado.



Para expresar o seguinte grafo nunha matriz sempre se considera cun 0 se non hai comunicación e cun 1 se están comunicados. A fila e o punto de partida e a columna o de chegada.

a) A matriz de información asociada é:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C & E & H & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

O elemento $a_{14} = 1$ *xa que de C sae unha frecha para I. Como de C non sae ningunha frecha máis o resto dos termos da primeira fila son nulos e sucesivamente o resto.*

b) Cadrado da matriz de información:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

O cadrado da matriz indica as diferentes formas de unir dous puntos da cidade pasando por un punto intermedio. Por exemplo, o elemento $a_{42} = 1$ *indica que se pode ir do Instituto á Estación pasando por un punto intermedio dunha forma, neste caso*
I → H →E.