PROGRAMACIÓN LINEAL

Exercicios autoavaliables

1. Consideramos o seguinte sistema de inecuacións: $\begin{cases} y - x - 2 \leq 0 \\ y + x \leq 6 \\ 2y \geq 5 - x \end{cases}$

   a) Representa graficamente a rexión factible e calcula os vértices.
   b) Calcula en que punto ou puntos desa rexión alcanza os valores máximos e mínimos a función $\mathrm{F(x,y) = x + 2y}$
   c) Responde ao apartado anterior se se engade a condición $\mathrm{y} \geq 0$

2. Consideremos a rexión factible definida por : $\begin{cases} x + 6y \geq 6 \\ 5x - 2y \geq -2 \\ x + 3y \leq 20 \\ 2x - y \leq 12 \end{cases}$

   a) Representa graficamente a rexión anterior e calcular as coordenadas dos vértices.
   b) Determínese os puntos nos que a función $\mathrm{F(x,y) = 4x - 3y}$ alcanza os seus máximos e mínimos, e canto vale a función neses puntos.

3. Sexa S a rexión do plano determinada polo sistema de inecuacións: $2x + 3y \leq 12; y \geq 0;\ -2 \leq 2x - y \leq 4$.

   a) Representa a rexión factible S e calcula os seus vértices. Xustifica se o punto P(-1/2, 1/2) está ou non na rexión S.
   b) Calcula o punto ou puntos de R onde o función $\mathrm{f(x,y) = -2x + 5y}$ alcanza os seus valores máximo e mínimo.

4. O dono duna tenda fotográfica desexa comercializar dous tipos de cámara de fotos A e B cun prezo de venda ao público de 210€ e 300€ a unidade, respectivamente. Para a compra de ambos os dous tipos dispón dun máximo de 2760€ e fará o pedido a un almacén que lle cobra 120€ por cada cámara do tipo A e 180€ por cada cámara do tipo B. O dono fará o pedido coa condición de que polo menos 3 cámaras sexan do tipo A e entre 4 e 12 do tipo B e o número de cámaras do tipo A non debe superar en máis de 3 unidades as cámaras do tipo B.

   a) Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.
   b) Cantas cámaras de cada tipo deberá adquirir para que os beneficios obtidos sexan máximos?

5. Sexa a función $F(x,y) = 0{,}8x + 1{,}5y$ suxeita as restricións:

$$x + y \leq 10, x + 2y \geq 8, 2 \leq y \leq x + 6, x \leq 6$$

   a) Representa a rexión factible S e calcula os seus vértices.
   b) Calcula os puntos de S onde a función alcanza os seus máximos e mínimo.

6. Considerase a función $f(x, y) = x + 2y$, suxeita as restricións $x + y \leq 9, y - x \leq 5,\ 2y \geq 4 - x, 0 \leq x \leq 6, y \geq 0$

a) Representa a rexión factible S coa axuda do GeoGebra e calcula os seus vértices.

b) Calcula os puntos de S onde a función alcanza os seus valores máximo e mínimo. Calcula eses valores.

c) Responde ao apartado anterior se se elimina a restrición $y \geq 0$ do anterior conxunto de restricións.

7. Unha empresa laboral ten na súa carteira de clientes tanto empresas como a particulares. Para o próximo ano quere conseguir como clientes polo menos a 5 empresas e a un número de particulares que, como mínimo, debe de superar en 4 ao dobre do número de empresas. Ademais, o número total de clientes anuais non debe superar os 40 clientes. Espera que cada empresa lle produza 800€ de ingresos anuais e cada particular 600€ anuais.

a) Expresa as restricións do problema. Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

b) Que solución lle proporciona os maiores ingresos anuais? A canto ascenderían os ditos ingresos?

8. Unha empresa informática vende entre outros produtos ordenadores portátiles e impresoras, podendo almacenar un máximo de 150 unidades en total. Para atender a demanda dos seus clientes deben ter en Stock polo menos 20 portátiles e polo menos 50 impresoras. Ademais, para lograr un prezo competitivo o provedor esíxelle que o número de impresoras que merque ten que ser igual ou superior en 20 unidades ao número de portátiles.

a) Fórmula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.

b) Se na venda de cada portátil obtén un beneficio de 80€ e na impresora 20€, cantas unidade de cada tipo debe vender para obter o máximo beneficio? A canto ascende dito beneficio máximo?.

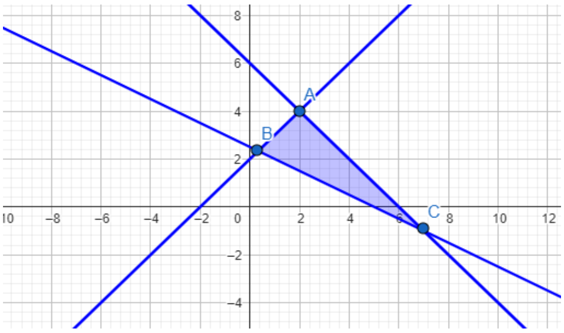
Solucións

1. Consideramos o seguinte sistema de inecuacións: $\begin{cases} y - x - 2 \leq 0 \\ y + x \leq 6 \\ 2y \geq 5 - x \end{cases}$

   a) Representa graficamente a rexión factible e calcula os vértices.
   b) Calcula en que punto ou puntos desa rexión alcanza os valores máximos e mínimos a función $\mathrm{F(x,y) = x + 2y}$
   c) Responde ao apartado anterior se se engade a condición $\mathrm{y \geq 0}$

a) Representa graficamente a rexión factible e calcula os vértices.

Para representar a rexión factible deberemos representar cada recta e estudar o semiplano solución. Para cada recta calcularemos dous puntos polos que pasa:
$y - x - 2 = 0$ *pasa polos puntos* $(0,2)$ *e* $(-2,0)$
$y + x - 6 = 0$ *pasa polos puntos* $(0,6)$ *e* $(6,0)$
$2y = 5 - x$ *pasa polos puntos* $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ *e* $(5,0)$



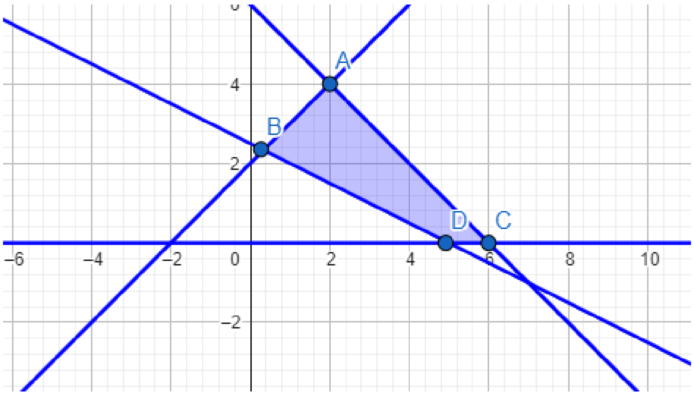
Logo estudaremos o semiplano solución estudando o signo do punto (0,0) por exemplo, xa que no pasa por ningunha das rectas.
Calculamos os vértices, temos que calcular os puntos de corte das rectas os puntos A e C, pódense deducir da imaxe o punto C non, deberemos resolver o sistema formado polas rectas:

$\begin{cases} y - x - 2 = 0 \\ 2y = 5 - x \end{cases}$ *obtemos B(1/3, 7/3)*

Entón os vértices son: B(1/3, 7/3), A(2,4) , C(7,-1).

b) Calcula en que punto ou puntos desa rexión alcanza os valores máximos e mínimos a función $F(x,y) = x + 2y$
Calculamos os valores que toma a función a optimizar nos vértices:
$F\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) = 5;\ F(2,4) = 10;\ \ F(7,-1) = 5$
Nos puntos A e C alcanza o valor mínimo e en todos os infinitos puntos de dito segmento e no punto B alcanza un máximo.

c) Responde ao apartado anterior se se engade a condición $y \geq 0$
Temos que representar a nova rexión factible, neste caso varía pouco, calculamos tamén os novos vértices: B(1/3, 7/3), A(2,4) , C(6,0) e D(5,0). Representamos:



A función obxectivo nesta nova rexión toma o valor máximo no mesmo punto A(2,4) e o valor mínimo nos puntos B e D e nos infinitos punto do segmento. que forman.

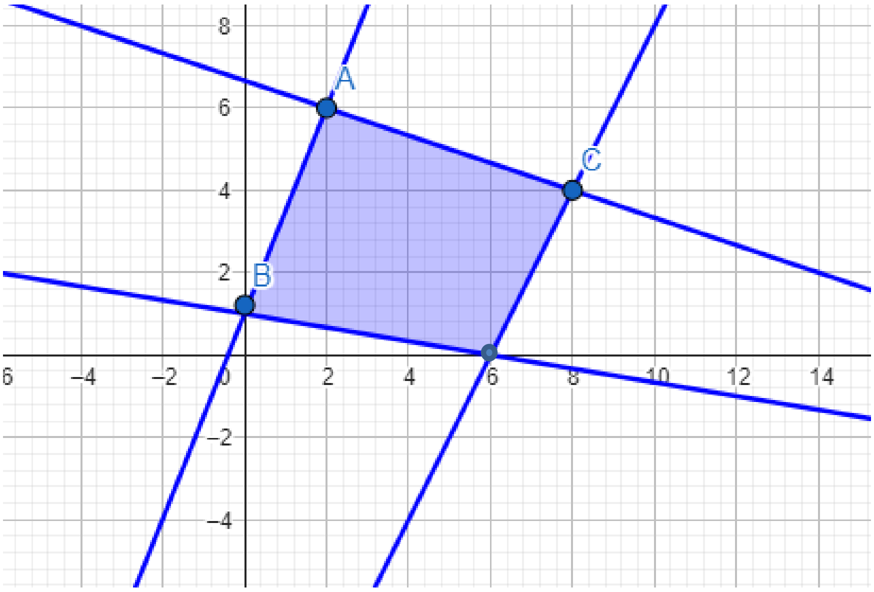
$F(2,4) = 10;\ F(5,0) = 5$ *e* $F\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) = 5$

2. Consideremos a rexión factible definida por : $\begin{cases} x+6y \geq 6 \\ 5x-2y \geq -2 \\ x+3y \leq 20 \\ 2x-y \leq 12 \end{cases}$

a) Representa graficamente a rexión anterior e calcular as coordenadas dos vértices.
b) Determínese os puntos nos que a función $\mathrm{F(x,y)} = 4\mathrm{x} - 3\mathrm{y}$ alcanza os seus máximos e mínimos, e canto vale a función neses puntos.

a) Representa graficamente a rexión anterior e calcular as coordenadas dos vértices.

Representamos cada recta e estudamos o semiplano solución obtemos seguinte rexión factible:



Os vértices A,B,C e D neste caso pódense obter simplemente da rexión se non teríamos que calcular as solucións dos sistemas formados polas rectas.

b) Determínese os puntos nos que a función $F(x,y) = 4x - 3y$ alcanza os seus máximos e mínimos, e canto vale a función neses puntos.

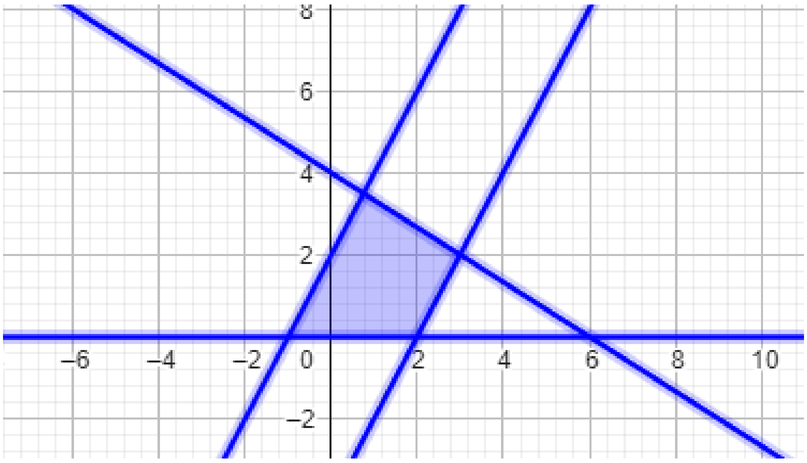
A solución óptima máxima ou mínima atópase nos vértices, así que imos calcular a imaxe dos puntos na función obxectivo:
A(2,6); $F(2,6) = -10$
B(0,1)); $F(0,1) = -3$
C(8,4)); $F(8,42,6) = 20$
D(6,0)); $F(0,6) = 24$
Polo tanto o mínimo atópase no punto A(2,6) e vale -10; e o máximo ten un valor de 24 e alcánzase no punto D(6,0)

3. Sexa R a rexión do plano determinada polo sistema de inecuacións: $2x + 3y \leq 12; y \geq 0;\ -2 \leq 2x - y \leq 4$.

a) Representa a rexión factible S e calcula os seus vértices. Xustifica se o punto P(-1/2, 1/2) está ou non na rexión S.
b) Calcula o punto ou puntos de S onde o función $\mathrm{f(x, y)} = -2\mathrm{x} + 5\mathrm{y}$ alcanza os seus valores máximo e mínimo.

a) Representa a rexión factible S e calcula os seus vértices. Xustifica se o punto P(-1/2, 1/2) está ou non na rexión S.

Temos que representar a rexión factible, para cada recta calcularemos dous puntos polos que pasa
$2x + 3y = 12\ pasa\ polos\ puntos (0,4) e\ (2,0)$
$-2 = 2x - y\ pasa\ polos\ puntos\ (0,2) e\ (-1,0)$
$2x - y = 4\ pasa\ polos\ puntos\ (0,-4) e\ (2,0)$



Calculamos os vértices, puntos de corte das recta, tres dos catro puntos podemos deducilos da rexión e o outro deberemos resolver o sistema formado polas dúas rectas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 2 = 2x - y \end{cases}$$

Obtemos: (3/4, 7/2)

Os vértices son: (-1,0), (3/4, 7/2), (3,2) e (2,0)

O punto P(-1/2, ½) está na rexión factible xa que verifica todas as restricións.

b) Calcula o punto ou puntos de R onde o función $f(x, y) = -2x + 5y$ alcanza os seus valores máximo e mínimo.

Calculamos os valores que toma a función a optimizar nos vértices da rexión factible:
f(-1,0)=2, f(3/4, 7/2)=11/2 f(3,2)=4, f(2,0)= -4
Polo que alcanza o máximo no punto (3/4, 7/2), e o mínimo no punto (2,0).

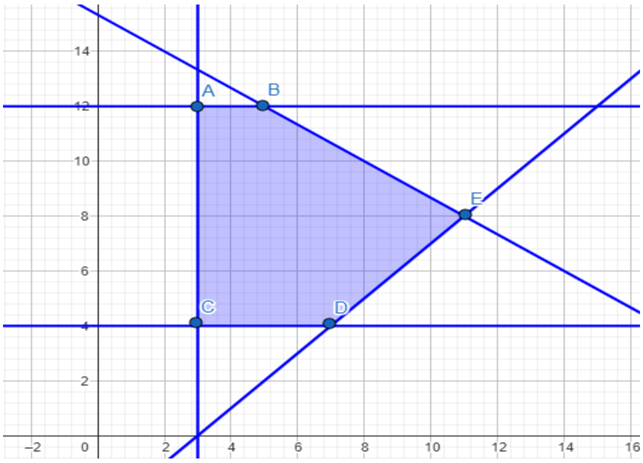
4. O dono duna tenda fotográfica desexa comercializar dous tipos de cámara de fotos A e B cun prezo de venda ao público de 210€ e 300€ a unidade, respectivamente. Para a compra de ambos os dous tipos dispón dun máximo de 2760€ e fará o pedido a un almacén que lle cobra 120€ por cada cámara do tipo A e 180€ por cada cámara do tipo B. O dono fará o pedido coa condición de que polo menos 3 cámaras sexan do tipo A e entre 4 e 12 do tipo B e o número de cámaras do tipo A non debe superar en máis de 3 unidades as cámaras do tipo B.

a) Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible, calcula os seus vértices.
b) Cantas cámaras de cada tipo deberá adquirir para que os beneficios obtidos sexan máximos?

a) Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible, calcula os seus vértices.

Sexa $x =$ número de cámaras de A, e $y =$ número de cámaras de B

$$\begin{cases} 120x + 180y \leq 2760 \\ x \geq 3 \\ 4 \leq y \leq 12 \\ x \leq y + 3 \end{cases}$$



Debuxamos a rexión factible e calculamos os vértices: A(3,4) B(3,12) C(5,12) e D(11,8)

b) Cantas cámaras de cada tipo deberá adquirir para que os beneficios obtidos sexan máximos?
A función beneficio a maximizar:

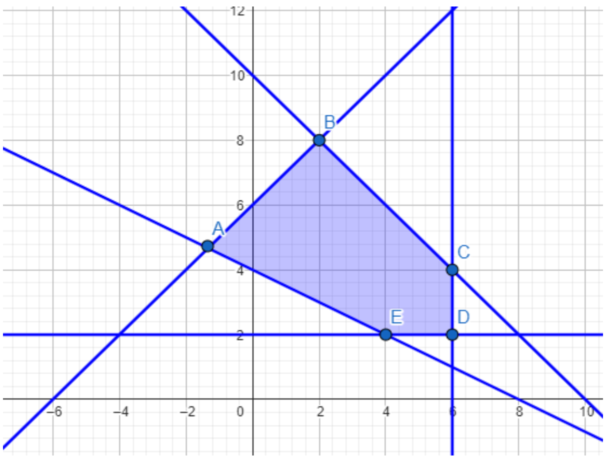
$$f(x, y) = (210 - 120)x + (300 - 180)y = 90x + 120y$$

A solución óptima atoparase nun dos vértices, neste caso no D, deberá adquirir 11 cámaras do tipo A e 8 cámaras do tipo B, para alcanzar beneficios máximos.

5. Sexa a función $F(x, y) = 0{,}8x + 1{,}5y$ suxeita as restricións:

$$x + y \leq 10, x + 2y \geq 8, 2 \leq y \leq x + 6, x \leq 6$$

a) Representa a rexión factible S e calcula os seus vértices.
b) Calcula os puntos de S onde a función alcanza os seus máximos e mínimo.



a) Representa a rexión factible S e calcula os seus vértices.

Deberemos representar as rectas e estudar o semiplano solución. Ao representar as rectas podemos deducir os valores dos vértices da rexión factible, salvo o valor do vértice A, que o podemos obter coa intersección das rectas:
$\begin{cases} y = x + 6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$; *obtemos A(-4/3, 14/3)*
Os vértices da rexión: A(-4/3, 14/3), B(2,8), C(6,4), D(6,2) E(4,2)

b) Calcula os puntos de S onde a función alcanza os seus máximos e mínimo.
$F(x, y) = 0{,}8x + 1{,}5y$

Estudamos os valores dos vértices na función obxectivo:
F(-4/3, 14/3)=5,93 ; F(2,8)=13,6 ; F(6,4)=10,8 ; F(6,2)=7,8 ; F(4,2)= 6,2

A función obxectivo toma un máximo no punto B e un mínimo A.

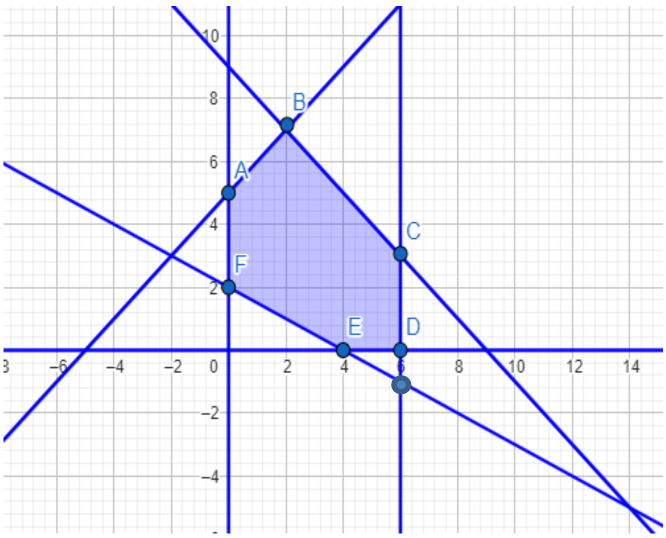
6. Considerase a función $f(x,y) = x + 2y$, suxeita as restricións $x + y \leq 9, y - x \leq 5,\ 2y \geq 4 - x, 0 \leq x \leq 6, y \geq 0$

a) Representa a rexión factible S, coa axuda do GeoGebra e calcula os seus vértices.

b) Calcula os puntos de S onde a función alcanza os seus valores máximo e mínimo. Calcula eses valores.

c) Responde ao apartado anterior se se elimina a restrición $y \geq 0$ do anterior conxunto de restricións.

a) Representa a rexión factible S, e calcula os seus vértices.
Introducimos as rectas na aplicación e obtemos a seguinte rexión factible. A vista da imaxe podemos concluír o valor dos vértices e incluso comprobalo coa axuda da aplicación:



A(4,0), B(2,7) C(6,3), D(6,0),E(4,0) e F(0,2)

b) Calcula os puntos de S onde a función alcanza os seus valores máximo e mínimo. Calcula eses valores.

A función alcanza o máximo no vértice B(2,7), valor 16.
E alcanza o mínimo nos vértice E e D e nos infinitos punto do segmento ED o valor mínimo é 4.

c) Responde ao apartado anterior se se elimina a restrición $y \geq 0$ *do anterior conxunto de restricións.*
Temos un novo vértice, na rexión factible G(6,1) e agora a rexión queda limitada polos vértices ABCGF.

Alcanza un máximo no vértice B(2,7) valor 16. E o mínimo nos vértice G(6,-1) e F(0,2) e nos infinitos puntos do segmento GF. Valor 4.

7. Unha empresa laboral ten na súa carteira de clientes tanto empresas como a particulares. Para o próximo ano quere conseguir como clientes polo menos a 5 empresas e a un número de particulares que, como mínimo, debe de superar en 4 ao dobre do número de empresas. Ademais, o número total de clientes anuais non debe superar os 40 clientes. Espera que cada empresa lle produza 800€ de ingresos anuais e cada particular 600€ anuais.

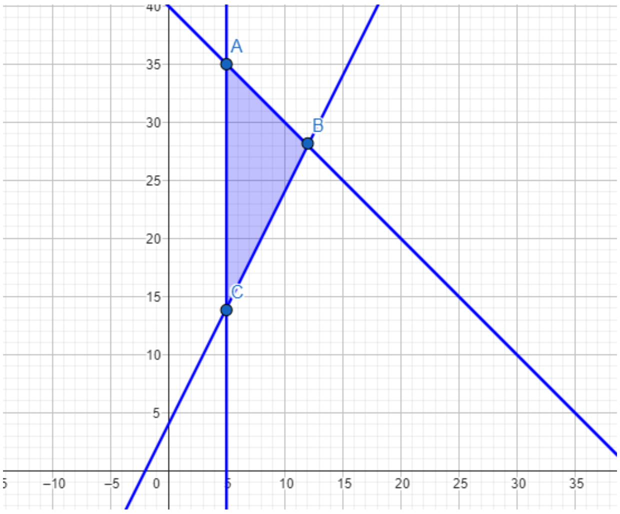
a) Expresa as restricións do problema. Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

b) Que solución lle proporciona os maiores ingresos anuais? A canto ascenderían os ditos ingresos?

a) Expresa as restricións do problema. Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.
Sexan "x" o número de empresas que son clientes da asesoría e "y" o número de particulares que son clientes na asesoría.
Formulamos as restricións :$x \geq 5,\ \ y \geq 2x + 4,\ \ x + y \leq 40$

Representamos as rectas e estudamos o semiplano solución.
E calculamos os vértices: B(5, 14); C(5, 35); B(12, 28)

A función a optimizar: $f(x, y) = 800x + 600y$



b) Que solución lle proporciona os maiores ingresos anuais? A canto ascenderían os ditos ingresos?
Solución óptima atópase no punto B(12,28) é dicir, a solución que lle proporciona maiores ingresos anuais sería con 12 empresas e 28 clientes particulares, xa que é vértice onde a función obxectivo ten maior valor.

Os ingresos máximos anuais son 26400€

8. Unha empresa informática vende entre outros produtos ordenadores portátiles e impresoras, podendo almacenar un máximo de 150 unidades en total. Para atender a demanda dos seus clientes deben ter en Stock polo menos 20 portátiles e polo menos 50 impresoras. Ademais, para lograr un prezo competitivo o provedor esíxelle que o número de impresoras que merque ten que ser igual ou superior en 20 unidades ao número de portátiles.

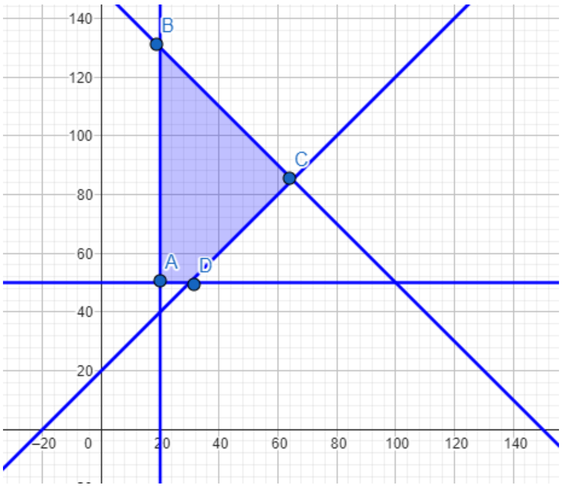
a) Fórmula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.
b) Se na venda de cada portátil obtén un beneficio de 80€ e na impresora 20€, cantas unidade de cada tipo debe vender para obter o máximo beneficio? A canto ascende dito beneficio máximo?

a) Fórmula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.
Sexan x=número de ordenadores portátil e y=número de impresoras, que vende a tenda de informática.

Formulamos o sistema de inecuacións:

$x + y \leq 150,\ x \geq 20, y \geq 50\ , y \geq x + 20$

Calculamos os vértices e representamos a rexión factible; A(20,50), B(20,130) D(30,50) e C(65,85)



b) Se na venda de cada portátil obtén un beneficio de 80€ e na impresora 20€, cantas unidade de cada tipo debe vender para obter o máximo beneficio? A canto ascende dito beneficio máximo?

A función obxectivo a optimizar será $f(x, y) = 80x + 20y$ *e alcanza o valor máximo no punto C(65,85), pódese ver co método alxébrico ao trazar rectas paralelas esta corta no punto C ao final .*
O valor do beneficio é de 6900€ se vendemos 85 impresoras e 65 portátiles