

TRAZADOS XEOMÉTRICOS FUNDAMENTAIS NO PLANO

1. O debuxo técnico

1.1 Orixes da xeometría. Thales, Pitágoras, Euclides, Hipatia de Alexandría

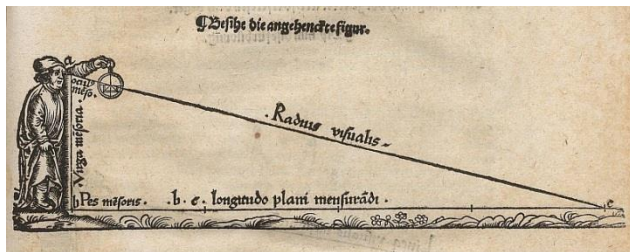


Ilustración 1. Agrimensura

A orixe da xeometría semella remontarse á antiga civilización exipcia, onde xorde como consecuencia do replantamento e novo trazado das leiras que esixían as inundacións do río Nilo. Os antigos xeómetras eran chamados “tensadores de cordas” polas cordas que usaban para a agrimensura.

A palabra xeometría vén dos vocábulos gregos “xeos” (terra) e “metron” (medida). É Thales, no século VI a. C., de orixe fenicia, quen vaii estudar a Exipto e mide a altura das pirámides a partir da súa sombra. Máis tarde establécese en Grecia fundando en Mileto a coñecida como “Escola Xónica”, e enriquecendo a xeometría coa “Teoría da semellanza”.

Continuador de Thales, e o seu máis ilustre discípulo é Pitágoras, que deixa importantes teoremas, sucedido por Platón, quen no campo da xeometría, introduce o concepto de “lugar xeométrico”, e os primeiros coñecementos de seccións cónicas, denominadas por Menecmo, oxitoma (elipse), ortotoma (parábola) e amblitoma (hipérbole). Outros xeómetras coñecidos da época foron Anaxágoras, Hipócrates ou Perseo.

Todo ese coñecemento que durou aproximadamente tres séculos foi recompilado por Euclides, considerado o verdadeiro fundador da xeometría. A súa obra cumio foi “Os elementos da Xeometría”, que se ten polo primeiro texto escrito sobre a materia cun carácter formal. A obra constaba de trece libros.



Ilustración 2. Hipatia de Alexandría

Posteriormente a Euclides houbo en Grecia grandes xeómetras instruídos xa no rigor da nova ciencia. Entre eles, Arquímedes (287 a. C.) que se ocupa da xeometría da medida; Apolonio (262 a. C.) considerado o xeómetra por excelencia trala aparición da súa obra “Tratado das cónicas”, da que até nós só chegou íntegra a metade, sendo o resto unha tradución ao árabe; e Ptolomeo (100 d. C.), iniciador da trigonometría. Os seus rudimentos están na obra “Almagesto” achegada a través do árabe. Hipatía de Alexandría (ca. 355 d. C.) inflúe sobre unhas importantes obras gregas coma “Os elementos” de Euclides e o “Tratado das cónicas” de Apolonio.

1.2 Desenvolvemento histórico do debuxo técnico

Despois desta época, que remata ao principio da Era Cristiá, vén un estancamento que conclúe coa chegada do Renacemento. No primeiro Renacemento xorde a proxección central ou cónica na obra de artistas como Paolo Ucello ou Piero della Francesca, que desenvolven con precisión unha proxección cónica sen aplicación técnica, polo que xorden dúas vías de desenvolvemento aparentemente independentes: a proxección central vencellada á arte, e o sistema diédrico e as perspectivas paralelas de aplicación máis técnica, das que fai síntese a xeometría proxectiva.

Xorden no Renacemento figuras da vertente científica do debuxo como Kepler, Newton, Pascal, Euler ou Gauss. A mediados do século XVII Descartes introduce o concepto de “coordenadas” (cartesianas) e descubre que todo problema gráfico ten tradución alxébrica. Así nace unha nova póla da xeometría denominada xeometría analítica. A partir de Descartes os grandes xeómetras farán estudos paralelos en ambos eidos, na xeometría métrica e na analítica. No século XVIII a xeometría convértese en alicerce da enxeñaría.

A necesidade de representar no plano corpos de tres dimensións xa fora formulada por algúns técnicos e artistas no Renacemento. Pero é Gaspard Monge a finais do século XVIII o pai da chamada xeometría descritiva. Mentres traballa coma profesor da Escola Tecnolóxica de Francia, desenvolve os principios da proxección, que son a base do debuxo técnico.

Estes principios teñen tanta importancia militar que Monge é obrigado a mantelos en segredo até 1795, ano a partir do que se converten en parte fundamental da formación en Francia, Alemaña e posteriormente en Estados Unidos.

O método de Monge é o sistema diédrico. Previamente, a mediados do século XVII Desargues estudara unha parte da xeometría que non tomou corpo até principios do século XIX con Chasles e Poncelet: a xeometría proxectiva.

Posteriormente desenvolveranse outros ámbitos da xeometría, como a diferencial ou a computacional, que usan os programas de Deseño Asistido por Ordenador (CAD). En resumo, as etapas evolutivas da xeometría foron: métrica, analítica, descritiva, proxectiva, diferencial e computacional.

2. Campos de acción e aplicación

O debuxo técnico é un método gráfico que serve para representar no plano calquera obxecto e para permitir a súa construción. Co desenvolvemento industrial e tecnolóxico o debuxo ten aumentado o seu eido de acción. Os principais debuxos, cada un co seu propio código, son os seguintes:

- **Debuxo arquitectónico:** abrangue unha gama de representacións gráficas coas que se fan os planos para a construción de edificios e vías de comunicación, entre outros. Debúxase o proxecto con instrumentos precisos, cos seus respectivos detalles, axuste e correccións, onde se materializan os planos de planta, fachadas, seccións, perspectivas, alicerces, soportes, detalles...
- **Debuxo estrutural:** aplícase á edificación e obra civil e naval, aeronáutica, espacial, industrial, e en todos os casos en que o importante é a estabilidade da estrutura dunha construción.
- **Debuxo mecánico:** emprégase na elaboración de planos, para a representación de pezas ou partes mecánicas, maquinarias, vehículos... É importante ter un amplo coñecemento dos elementos das máquinas, da súa fabricación e da súa representación gráfica. Serán facilmente interpretables polo fabricante e usuario, e han representar con claridade cada característica esencial e as normas a seguir.
- **Debuxo eléctrico:** refírese á representación gráfica de instalacións eléctricas nunha industria, oficina ou vivenda que precise de electricidade. A diferenza dos anteriores, o debuxo eléctrico baséase en símbolos, e as conexións entre elementos non pretenden reproducir a realidade física senón favorecer a comprensión mediante a simplicidade topolóxica (o lugar onde están as cousas).
- **Debuxo técnico electrónico:** relaciónase coa representación de esquemas e diagramas de circuítos electrónicos de circulación de corrente de pouca intensidade, como radios, televisores ou computadoras entre outros.
- **Debuxo xeolóxico:** o debuxo xeolóxico emprégase en xeografía e xeoloxía, represéntanse nel as diversas capas da Terra, empregando unha simboloxía e dá a coñecer os minerais contidos en cada capa. Emprégase moito en minaría e en exploracións de xacementos petrolíferos.
- **Debuxo topográfico:** é o debuxo técnico que ten por obxecto representar nun plano as características dun terreo, coma o relevo e a altura a diferentes niveis. Representa as características dunha extensión de terreo, mediante signos convencionais. Avisa os accidentes naturais e artificiais, cotas ou medidas, curvas horizontais ou curvas de nivel.
- **Debuxo cartográfico:** é o empregado en cartografía, topografía e outras representacións de contornas de grande extensión.
- **Debuxo urbanístico:** úsase na organización de cidades, na localización de centros urbanos, zonas industriais, bulevares, rúas, avenidas ou xardíns. Debúxanse anteproxectos, proxectos, planos de conxunto, planos de detalle, entre outros.
- **Debuxo técnico das instalacións sanitarias:** ten por finalidade representar a posición de cada peza sanitaria incluíndo a localización de tubos interiores e exteriores. Emprega cores normalizadas para indicar se se trata de tubos, aparellos ou elementos para distintas augas.

3. Trazados xeométricos fundamentais no plano

3.1. Elementos fundamentais

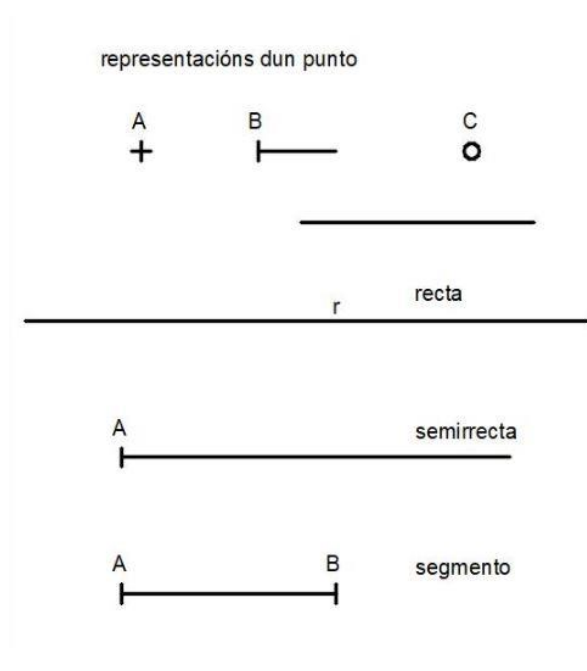


Ilustración 3. Punto e recta

Punto e recta son os dous elementos xeométricos máis básicos.

Un punto é un elemento adimensional que sinala unha posición no plano. Indícase con dous trazos perpendiculares e noméase con letras maiúsculas (punto A).

Unha liña recta é unha sucesión infinita de puntos dispostos nunha mesma dirección. Noméase con letras minúsculas (recta m).

Un segmento é a porción de recta comprendida entre dous puntos (extremos). Indícase con trazos perpendiculares sobre a recta nos extremos e noméase con dúas letras maiúsculas con subliñado superior (segmento $\overline{AB}$). Unha semirrecta é unha recta limitada por un punto nun dos seus extremos.

Segundo a súa posición relativa, as rectas son:

- Secantes: córtanse nun punto común.
- Coincidentes: todos os seus puntos son comúns.
- Paralelas: córtanse no infinito, polo que se perciben coma equidistantes sen puntos en común.
- Perpendiculares: córtanse formando un ángulo recto de 90° .

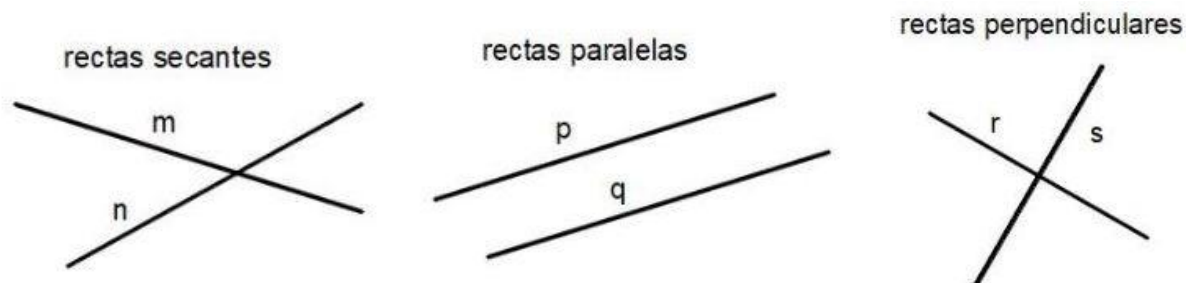
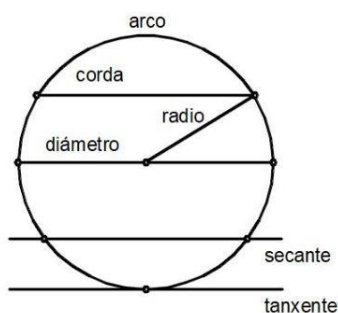


Ilustración 4. Posicións relativas entre rectas

3.2. Lugares xeométricos

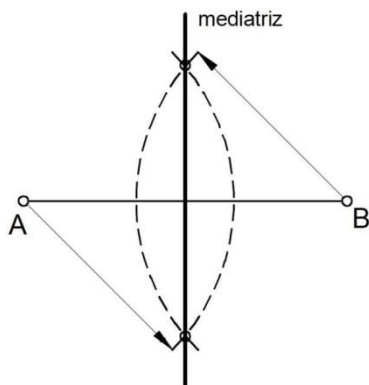
Lugar xeométrico é o conxunto de puntos que cumpren unha propiedade ou condición determinada. Así, son lugares xeométricos:

A circunferencia: lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dun punto fixo chamado centro da circunferencia, e determínase polo seu centro e o seu radio. Os elementos dunha circunferencia son:



- Radio: segmento que une un punto calquera da circunferencia co seu centro.
- Diámetro: segmento que une dous puntos da circunferencia pasando polo seu centro. A súa lonxitude é a metade do diámetro.
- Corda: segmento que une dous puntos calquera da circunferencia sen pasar polo centro.
- Arco: parte da circunferencia comprendida entre dous puntos ou correspondente a unha corda ou diámetro.

Ilustración 5. Elementos da circunferencia

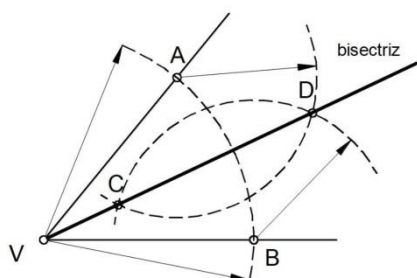


A mediatriz: é o lugar xeométrico dos puntos dun plano que equidistan dos extremos dun segmento. Pódese definir tamén como unha recta que corta perpendicularmente a un segmento polo seu punto medio. Pasos para construír unha mediatriz:

- Tomando coma centros os extremos A e B do segmento, trázanse dous arcos do mesmo radio que teñen que ser máis grandes cá metade da lonxitude do segmento.
- A unión dos puntos de cruzamento de ambos arcos, C e D, determina a mediatriz do segmento.

Ilustración 6. Construción da mediatriz

A bisectriz: é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan das súas semirectas que forman un ángulo. Pódese definir tamén como a semirecta que divide un ángulo en dúas partes iguais. Pasos para construír unha bisectriz:



- Tomando coma centro o vértice do ángulo (V), trázase un arco de radio arbitrario, que corta en A e B aos lados do ángulo.
- Tomando coma centros A e B, trázanse dous arcos do mesmo radio que se corten nun punto (C ou D).
- A unión de C ou D co vértice V determina a bisectriz do ángulo.

Ilustración 7. Construción da bisectriz

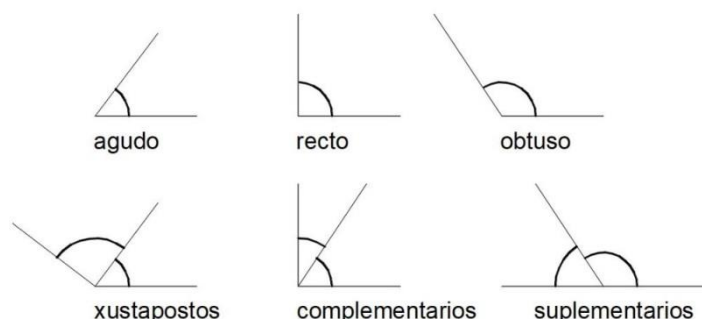
4. Ángulos

Un ángulo é a porción de plano limitada por dúas semirrectas (lados do ángulo) que teñen o mesmo extremo (vértice do ángulo). Os ángulos noméanse con letras maiúsculas ou letras minúsculas gregas. Graficamente os ángulos mídense en grados sexagesimais e son positivos se se miden en sentido antihorario.

Dous ángulos son complementarios cando xuntos suman un ángulo recto (90°) e suplementarios cando suman un ángulo chan (180°). Dise que dous ángulos son xustapostos se comparten o vértice e un lado.

4.1. Tipos de ángulos

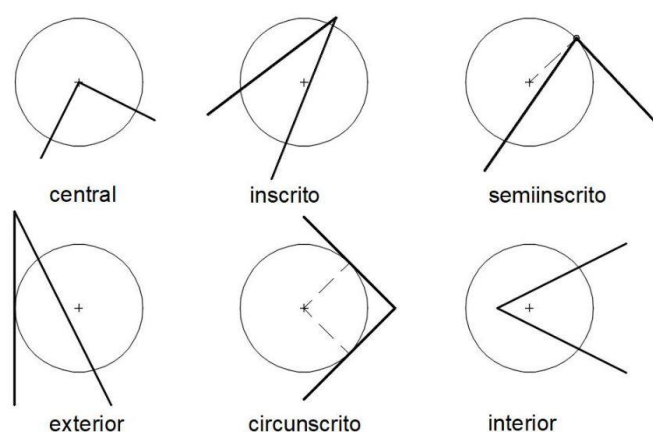
Atendendo ao criterio de apertura, os ángulos son:



- Agudos: miden menos de 90°
- Rectos: miden 90°
- Obtusos: miden máis de 90°

Ilustración 8. Tipos de ángulos

En relación a unha circunferencia un ángulo pode ser:



- Central: o vértice é o centro da circunferencia.
- Inscrito: o vértice está na circunferencia.
- Semiinscrito: é un ángulo inscrito cun dos lados tanxentes á circunferencia.
- Exterior: o vértice é un punto exterior á circunferencia.
- Circunscrito: é un ángulo exterior cos dous lados tanxentes á circunferencia.
- Interior: o vértice é un punto interior á circunferencia.

Ilustración 9. Ángulos en relación á circunferencia

5. Operacións gráficas básicas

5.1. Trazado de paralelas e perpendiculares utilizando escuadro e cartabón

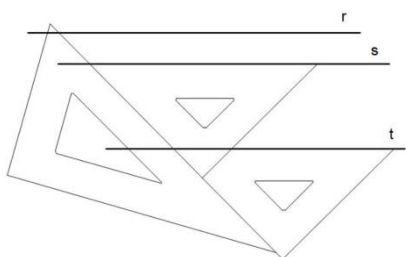


Ilustración 10. Posición dos padróns no trazado de liñas paralelas

O escuadro e o cartabón son instrumentos (padróns ou modelos) que permiten debuxar rectas paralelas, perpendiculares, e rectas que forman ángulos notables (0° , 30° , 45° , 60°) así coma combinacións destes últimos. O escuadro ten a forma dun triángulo rectángulo isósceles, con dous ángulos de 45° e un de 90° . O cartabón ten a forma dun triángulo rectángulo escaleno, con ángulos de 30° , 60° e 90° .

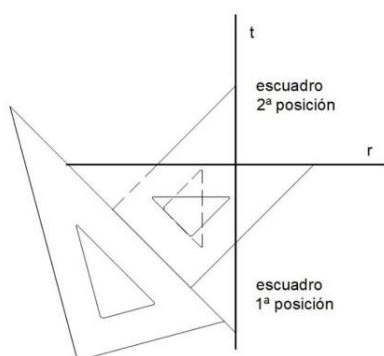
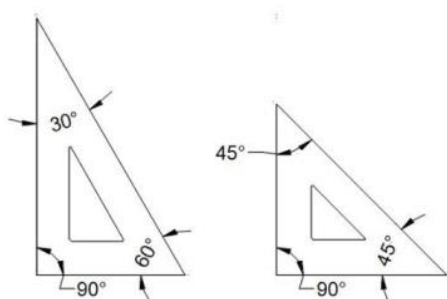


Ilustración 11. Posición dos padróns no trazado de liñas perpendiculares

Para trazar liñas paralelas ou perpendiculares a unha recta dada, faise coincidir a hipotenusa do escuadro coa recta dada, apoiando un dos seus catetos na hipotenusa do cartabón, que ten que ficar fixo. Para o trazado de paralelas desprázase directamente o escuadro sobre o cartabón. Para o trazado de perpendiculares, xírase o escuadro unindo o cartabón co outro cateto e desprázase mantendo fixo o cartabón.

5.2. Trazado de ángulos con escuadro, cartabón e compás

O escuadro e o cartabón serven coma soportes para o trazado de ángulos. Os dous son triángulos rectángulos cun ángulo recto, catetos e hipotenusa. Coma en calquera triángulo a suma dos tres ángulos é de 180° . Dadas as características antes descritas do escuadro e do cartabón, a construción de ángulos de 30° , 45° , 60° e 90° é directa. Para debuxar combinacións destes:

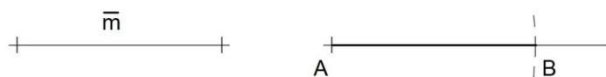


- $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$
- $30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$
- $45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$
- $45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$
- $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$
- $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

Ilustración 12. Cartabón e escuadro

5.3. Operacións elementais

Transporte dun segmento: para transportar un segmento m sobre unha recta:



- 1. Cóllese co compás a súa lonxitude.
- Facendo centro nun punto A da recta trázase un arco que a corte dando lugar ao extremo B.

Ilustración 13. Transporte dun segmento

Transporte dun ángulo: sexa α o ángulo de vértice E que se vai transportar sobre unha recta dada, obtendo o ángulo transportado β de vértice G.

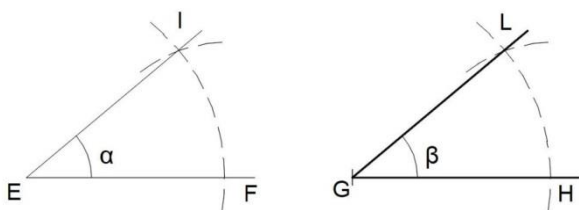


Ilustración 14. Transporte dun ángulo

- Pártese dun punto G situado sobre unha recta, que vai dar lugar ao primeiro lado do ángulo.
- Trázanse dous arcos do mesmo radio a partir dos puntos E e G.
- Cóllese a lonxitude IF no ángulo inicial e trasládase a partir do punto H cortando ao segundo arco en L.
- Obtense o segundo lado do ángulo unindo o vértice G con L.

Trazado dunha perpendicular e unha paralela a unha recta desde un punto P exterior á mesma:

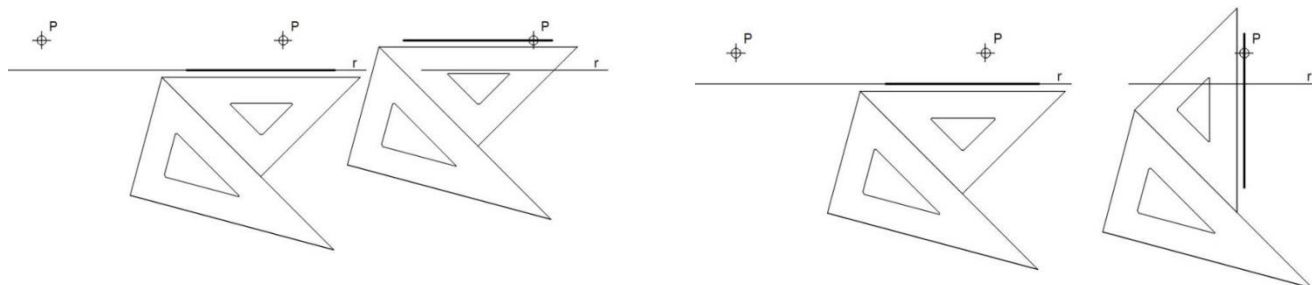


Ilustración 15. Perpendicular e paralela a unha recta por un punto exterior P

5.4. Operacións con segmentos

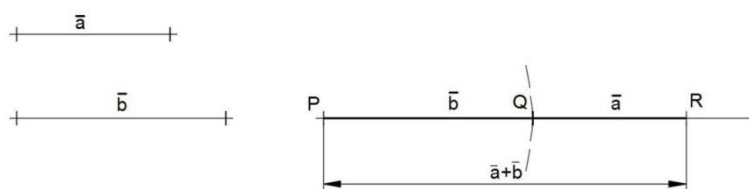


Ilustración 16. Suma de segmentos

Para sumar dous segmentos a e b , trasládanse consecutivamente as lonxitudes de ambos a partir dun punto P dunha recta. Cóllense co compás e trázanse arcos sobre a recta. O resultado é o segmento $\overline{PR}$.

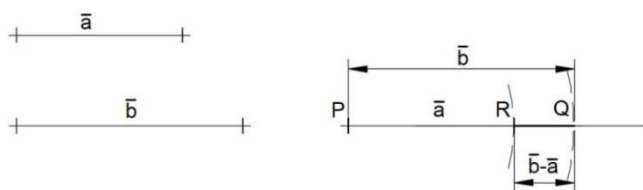


Ilustración 17. Diferenza de segmentos

Diferenza de segmentos. Para restar ao segmento b o segmento a trasládase superpostas as súas lonxitudes a partir dun punto P dunha recta, colléndoo co compás e trazando arcos sobre a recta. O resultado é o segmento $\overline{RQ}$.

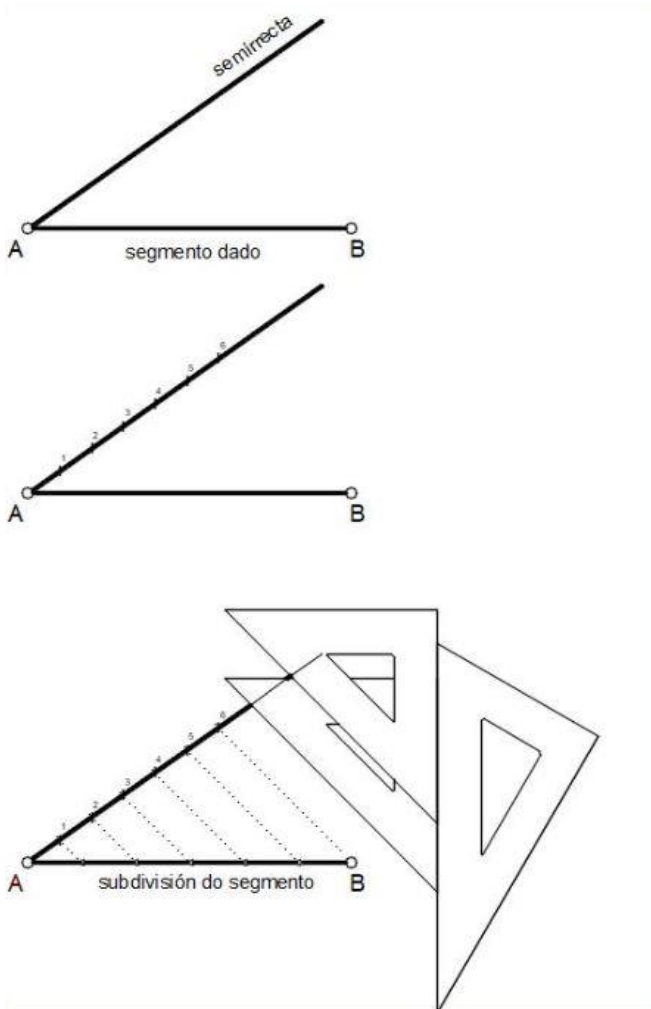


Ilustración 18. División dun segmento en partes iguais

División dun segmento en partes iguais utilizando o teorema de Tales. Para dividir un segmento en n partes iguais (nesta construción decídese dividir o segmento en 6 partes iguais):

- A partir do extremo A do segmento, trázase unha semirrecta seguindo unha dirección calquera.
- Sobre a semirrecta e a partir da súa orixe A lévanse 6 unidades iguais (mediante regra ou compás, levando a mesma medida).
- Únese o último punto obtido sobre a semirrecta, o punto 6, co extremo B do segmento.
- Trázanse paralelas a esta liña, $6B$, partindo de todas as divisións intermedias (puntos 5, 4, 3, 2 e 1).

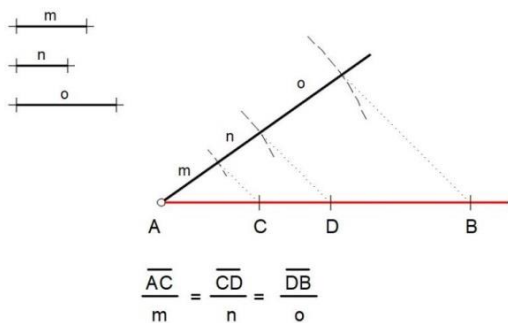


Ilustración 19. División dun segmento en partes proporcionais

División dun segmento en partes proporcionais ás lonxitudes doutros segmentos co teorema de Tales: dado o segmento $\overline{AB}$ a dividir e os segmentos m , n e o ; a partir de A trasládase a lonxitude dos tres segmentos sobre unha liña que saia desde A en calquera dirección. Únese o último extremo do segmento co punto B e trázanse paralelas polas divisións intermedias, dando lugar aos puntos C e D . Os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$ son proporcionais aos segmentos m , n e o .

Multiplicación e división de dous segmentos utilizando o teorema de Tales. Partindo de dous segmentos a e b e collendo un terceiro segmento de lonxitude a unidade, pódese calcular tanto o produto como o cociente de a e b (segmento x) tal e como se indica na ilustración 20. Procédese de xeito análogo ao caso anterior.

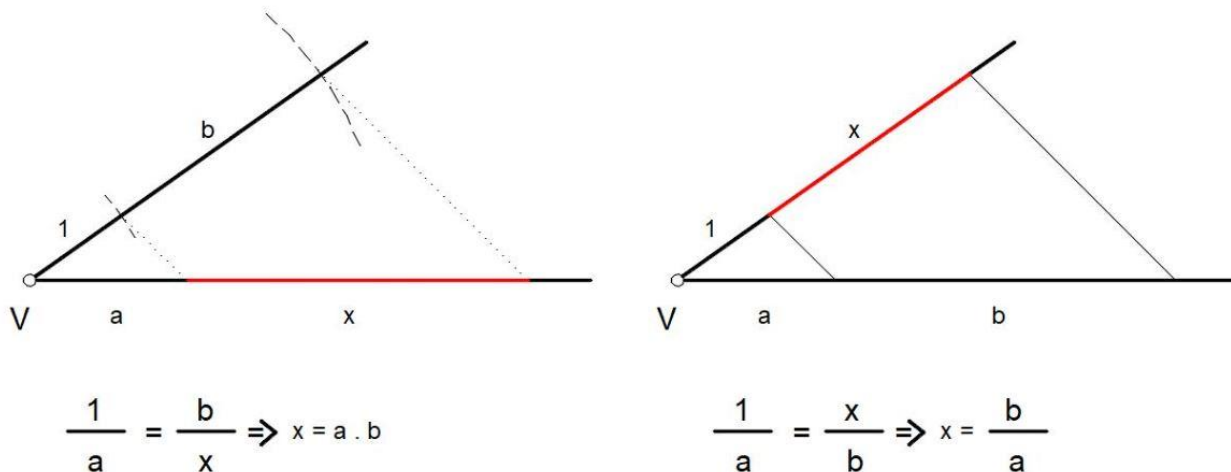
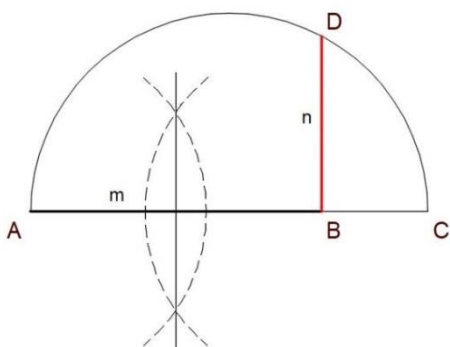


Ilustración 20. Multiplicación e división de segmentos por Tales



Raíz cadrada dun segmento. Na ilustración 21 indícase como calcular a raíz cadrada dunha lonxitude m correspondente a un segmento $\overline{AB}$. A partir do segmento m engádese outro segmento de lonxitude a unidade que da lugar ao punto C. Trázase a mediatriz do segmento $\overline{AC}$ e débúxase a semicircunferencia que lle corresponde. Levántase unha perpendicular desde B até cortar a semicircunferencia obtendo o punto D, sendo $n = \sqrt{m}$.

Ilustración 21. Raíz cadrada dun segmento

5.5. Operacións con ángulos

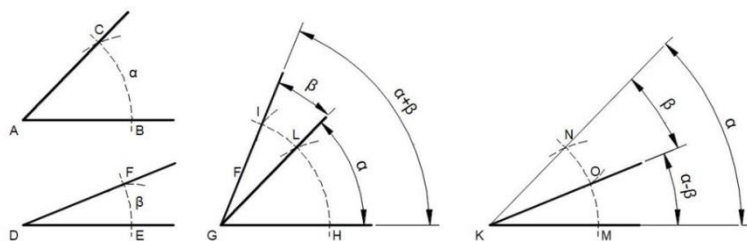


Ilustración 22. Suma e diferenza de ángulos

Suma e diferenza de ángulos. Sexan os ángulos α e β . Para construír o ángulo $\alpha + \beta$, transpórtanse a partir da semirrecta GH e en sentido positivo, os ángulos α e β , de xeito que queden xustapostos.

Para construír o ángulo $\alpha - \beta$ transpórtase a partir da semirrecta KM e en sentido positivo o ángulo α . De seguido transpórtase o ángulo β en sentido negativo, superpoñéndoo co ángulo anterior.

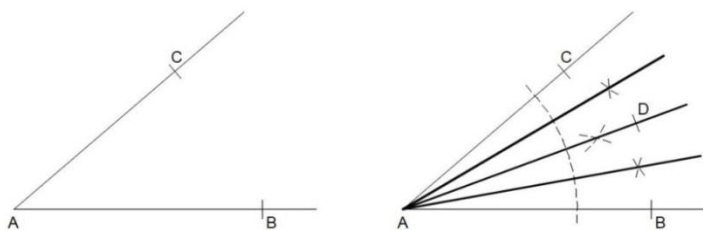


Ilustración 23. División dun ángulo en partes iguais

División dun ángulo en partes iguais. Dado o ángulo BAC, ao trazar a bisectriz AD quedará dividido en dúas partes iguais. Debuxando as bisectrices dos ángulos BAD e DAC divídese o ángulo BAC en 4 partes iguais. Outras catro bisectrices o dividirán en 8 partes iguais.

5.6. Operacións con arcos. Rectificacións

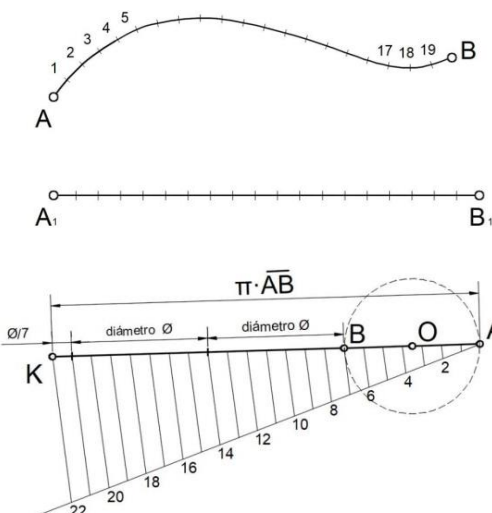


Ilustración 25. Rectificación dunha circunferencia

A rectificación dunha curva ou dunha circunferencia consiste en determinar sobre unha liña recta a súa lonxitude seguindo un procedemento gráfico. Dada unha curva AB, para rectificala tense que dividir nunha serie de arcos de moi pequena lonxitude. A continuación, tómase a medida destes arcos e transpórtase sobre unha recta.

Rectificación dunha circunferencia. Pasos a seguir:

- Divídese o diámetro $\overline{AB}$ da circunferencia en 7 partes iguais.
- Prolóngase $\overline{AB}$ e lévanse sobre esta liña dous diámetros: (tres diámetros en total. Súmase a esta medida $1/7$ (un sétimo) do diámetro $\overline{AB}$ ($7+7+7+1$). A lonxitude do segmento resultante $\overline{KA}$ é a lonxitude da circunferencia.

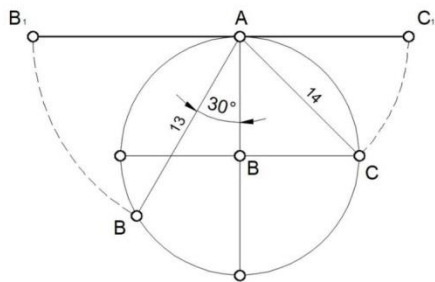


Ilustración 26. Rectificación dunha semicircunferencia

Rectificación dunha semicircunferencia. Pasos a seguir:

- Trázase na circunferencia correspondente ao lado do cadrado e do triángulo equilátero inscritos nela (debuxando ángulos de 30° e 45°).
- Partindo do punto A, colócase de xeito consecutivo o lado do triángulo equilátero e do cadrado. A medida $B1C1$ é a lonxitude da semicircunferencia.

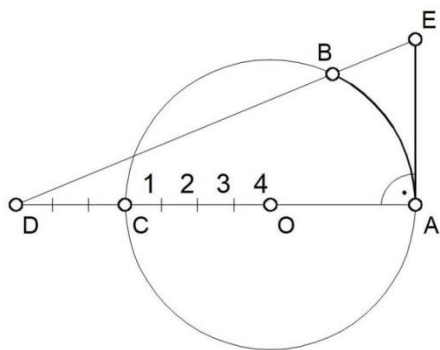


Ilustración 27. Rectificación dun arco de circunferencia menor de 90°

Rectificación dun arco de circunferencia menor de 90° :

- Dado o arco AB dunha circunferencia, divídese o radio da circunferencia en catro partes iguais.
- Prolóngase o radio OC fóra da circunferencia e márcanse tres divisións máis iguais ás anteriores ($3/4$ do radio).
- Únese o punto D co punto B (sendo AB o arco que hai que rectificar) e prolóngase esta liña até cortar a unha perpendicular ao diámetro polo punto A, obtendo o punto E.
- O segmento $\overline{AE}$ é a rectificación do arco AB da circunferencia.

Licenzas das ilustracións

Ilustración	Recurso
Ilustración 1. Agrimensura	Autoría: Deutsche Photothek Licencia: Dominio público Procedencia: https://n9.cl/7gokct
Ilustración 2. Hipatia de Alexandría	Autoría: Raffaello Santi Licencia: Dominio público. Procedencia: https://es.wikipedia.org/wiki/Hipatia#/media/Archivo:Sanzio_01_Hypatia.jpg
Ilustración 3. Punto e recta	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 4. Posicións relativas entre rectas	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 5. Elementos da circunferencia	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 6. Construción da mediatriz	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 7. Construción da bisectriz	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 8. Tipos de ángulos	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 9. Ángulos en relación á circunferencia	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 10. Posición dos padróns no trazado de liñas paralelas	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 11. Posición dos padróns no trazado de liñas perpendiculares	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 12. Cartabón e escuadro	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 13. Transporte dun segmento	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 14. Transporte dun ángulo	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 15. Perpendicular e paralela a unha recta por un punto exterior P	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 16. Suma de segmentos	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 17. Diferenza de segmentos	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 18. División dun segmento en partes iguais	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 19. División dun segmento en partes proporcionais	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 20. Multiplicación e división de segmentos por Tales	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 21. Raíz cadrada dun segmento	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 22. Suma e diferenza de ángulos	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 23. División dun ángulo en partes iguais	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 24. Rectificación dunha curva	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 25. Rectificación dunha circunferencia	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 26. Rectificación dunha semicircunferencia	Autoría: Elaboración propia
Ilustración 27. Rectificación dun arco de circunferencia menor de 90°	Autoría: Elaboración propia